GEOACTA **38**(2): 168-182 (2013) ISSN 1852-7744
© 2013 Asociación Argentina de Geofísicos y Geodestas

ANÁLISIS MULTIFRACTAL DE LA SERIE TEMPORAL DE CAUDALES DIARIOS EN EL RÍO NEUQUÉN

MULTIFRACTAL ANALYSIS OF THE TIME SERIES OF DAILY FLOW VALUES IN NEUQUÉN RIVER

Roberta Hansen[1] y Rafael Seoane [2,3,4]

(1) Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Argentina. E-mail: rhansen@fi.uba.ar
(2) Departamento de Hidráulica, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Argentina.
(3) Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Buenos Aires, Argentina.
(4) Instituto Nacional del Agua (INA), Buenos Aires, Argentina. E-mail: rseoane@ina.gov.ar

RESUMEN

En el presente estudio se aplica el Análisis Multifractal (AM) para analizar la variabilidad del patrón de comportamiento del caudal medio diario en el río Neuquén, registrado en la estación Paso de Indios por un período de cien años (1911-2011). El AM describe la invariancia de las propiedades de escala de series temporales. El espectro multifractal (EM) es una función de los exponentes de Hölder del sistema, los cuales caracterizan el grado de irregularidad de la señal, y sus parámetros más significativos son la "huella dactilar" del proceso. Existen diversas variantes para calcular este espectro, siendo el *espectro de Legendre* o termodinámico, f_L, el más utilizado en las aplicaciones. Se analizan los datos de la serie completa y de distintas subseries, dividiéndolos por décadas y por períodos de veinte años. Se calcula f_L, para todas ellas y, apartándose del AM estándar, también se calcula otro espectro llamado *espectro por-definición*, f_D, el cual ofrece una descripción más geométrica de la estructura de singularidad. Los parámetros de f_D y f_L son comparados con la variación de los exponentes de Hurst de las series, y de un índice de predictibilidad climática. Los resultados obtenidos muestran la presencia de cambios cualitativos en el patrón de comportamiento del régimen de caudales, sobre todo en la última década del siglo XX.
Palabras Claves: Espectros Multifractales; caudales medios diarios; exponentes de Hölder; bi-multifractalidad; índice de predictibilidad.

ABSTRACT

By means of the Multifractal Analysis (AM), a study of the variability of the behaviour pattern of daily mean flow values in the Neuquén River is presented, which was recorded in Paso de Indios station for a period of one hundred years (1911-2011). The AM describes the invariant scale properties in time series. The Multifractal Spectrum (EM) is a function of the Hölder exponents of the system, which characterize the irregularity degree of the signal, its most significant parameters being like a 'fingerprint' of the process. There are several versions for computing this spectrum, which are not equivalent, and among which the *Legendre* or thermodynamic *spectrum*, f_L, is the most used in the applications. For this research the data of the whole series and of the different subseries is analyzed by dividing them into decades and into periods of twenty years. f_L is calculated for all of them and, shifting from standard AM, another spectrum called *by-definition spectrum*, f_D is also calculated, since it gives a more geometrical description of the singularity structure. The parameters of f_D and f_L are compared with the variation of the Hurst exponents of the series, and with a climate predictability index. The resulting evidences exhibit the presence of qualitative changes in the pattern of the flows regime behavior, mostly in the last decade of the XX century.
Key words: Multifractal spectrum; daily mean flow values; Hölder exponents; bi-multifractality; predictability index.

INTRODUCCIÓN

La variabilidad climática influye sobre distintas variables hidrológicas y en particular, sobre los caudales de los ríos andinos. Para tratar de caracterizarla, entre otros métodos, se recurre al *Análisis Multifractal* (AM), el cual estudia la invariancia de las propiedades de escala de series temporales y permite mejorar la comprensión de fluctuaciones fuertes e irregulares. Para aplicar este método resulta necesario contar con series de datos que sean lo más extensas posible, y se ha elegido analizar la serie de caudales medios diarios del río Neuquén, registrados en la estación Paso de Indios.

El análisis de la presencia de cambios en series temporales de caudales diarios permite evaluar objetivamente la necesidad de contar con nuevas estimaciones de los parámetros hidrológicos que se utilizan en el diseño de grandes obras hidráulicas orientadas, por ejemplo, al control de crecidas y/o generación de energía hidroeléctrica.

En este trabajo se aplica el AM para estimar el espectro multifractal de la serie temporal observada en el río Neuquén, y evaluar la presencia de cambios en su predictibilidad. La importancia de este análisis consiste en que permitirá detectar variaciones en los patrones de comportamientos para distintas escalas temporales. Se calculan dos espectros multifractales, se expone en detalle la metodología empleada y se discuten los resultados obtenidos. Estos resultados también permitirán contar con la información necesaria para la comparación futura entre distintos sistemas hidrológicos complejos de Argentina.

Análisis Multifractal

Es conocido que en la naturaleza numerosas estructuras poseen características autosimilares y multifractales (Mandelbrot, 1983; Sornette, 2004). Entre ellos, y relacionados con la geofísica, se pueden citar: regímenes de precipitaciones (Douglas y Barros, 2003, Gómez y Poveda, 2008), velocidades de vientos (Piacquadio Losada y de la Barra; Kavasseri y Nagarajan, 2005), hidrología (Puente et al., 2001, Kosciely-Bunde et al., 2006), geología y geofísica de la tierra (Dimri, 2005). En todas estas disciplinas a menudo se analizan señales dadas por finitos datos muestrales, cuya apariencia exhibe una fuerte irregularidad pero que ocultan mucha información útil, por lo tanto, es necesario contar con métodos adecuados capaces de interpretar esta información. La existencia de fenómenos subyacentes y/o de variaciones en los comportamientos, que no son detectados por métodos convencionales, pueden ser estudiados y cuantificados usando las técnicas del (AM).

Los fractales son objetos de estructura compleja en todas las escalas. Las series temporales correspondientes a fenómenos de escalamiento, típicamente poseen esa estructura. Las funciones fractales son no derivables en todo punto ('zooming in'), y los procesos fractales no exhiben convergencia en el sentido del teorema central del límite ('zooming out'). Un parámetro útil para la descripción de su complejidad, es la dimensión fractal, la cual está estrechamente relacionada con el grado de regularidad Hölder de una función, pero al ser éste un parámetro "global", por sí sola no da cuenta de la variabilidad de este grado de regularidad. El AM apunta hacia una representación concisa de la "descomposición espectral" de una señal en partes de igual valor de regularidad, dándole así una estructura a la irregularidad a priori observada. Se aplica a fenómenos que tienen un comportamiento no lineal, con el propósito de identificar la mayor información de su estructura, y observar si exhiben dinámicas específicas o tendencias sobre escalas de tiempo múltiples.

El *Espectro Multifractal* (EM) es una función de los exponentes de Hölder del sistema, los cuales caracterizan el grado de irregularidad de la señal. Existen varias maneras de aproximar este EM tales como: *Wavelets*, *Detrended Fluctuation Analysis*, *Detrended Moving Average*, etc. (Riedi, 1998; Jaffard, 2004; Lashermes et al., 2005; Gu y Zhou, 2010, Kantelhardt et al., 2002; Kosciely et al., 2006).

En Hidrología, existe abundante literatura sobre AM, aplicado preferentemente al estudio de series de precipitaciones y de caudales (Kantelhardt et al. 2003, Kantelhardt et al. 2006). Estos autores proponen métodos de AM de fluctuaciones, que difieren de los propuestos por la escuela de Lovejoy (Tessier et al., 1996, Schertzer y Lovejoy, 2011) basados en el concepto de *cascadas multinomiales* (asociado a la intermitencia presente en fenómenos de turbulencia). Sivakumar (2009), Sivakumar et al. (2011) estudian las propiedades nolineales y caóticas de los sistemas complejos y sus aplicaciones en Hidrología; y recientes como el de Lombardo et al. (2013). Todos estos autores analizan y discuten los distintos métodos para probar si las series hidrológicas exhiben o no comportamiento multifractal, si se ajustan a ser mejor descriptas por unos modelos u otros, cuál de ellos refleja mejor el comportamiento fluctuante en un rango específico de escalas, etc.. En resumen, se presenta y discute el AM como una herramienta clasificatoria, y se interpretan los EM obtenidos como "huellas dactilares" ('fingerprints') de cada río, cuenca y/o cada zona de precipitación analizada.

En este marco teórico se analiza la serie temporal de caudales medios diarios del río Neuquén, correspondiente al período 1911-2011 (Fig. 1). Una característica común a todos los métodos propuestos para calcular un EM, es tratar de aproximar el llamado *espectro de Legendre*, f_L,el cual está basado en la función de momentos de una medida, y tiene ciertas propiedades que se describen más adelante. En este trabajo se calcula el f_L para la señal completa y para diferentes ventanas de la señal. Fuera del AM "clásico", se calcula otro EM que denominamos *espectro por-definición*, f_D, el cual ofrece una descripción más geométrica de la estructura de singularidad de la medida. El objetivo es identificar la huella dactilar de la serie de caudales observada en este río,

analizar y discutir las características y las variaciones que se producen en ambos espectros, calculados para la serie temporal completa, y para distintas subseries consideradas.

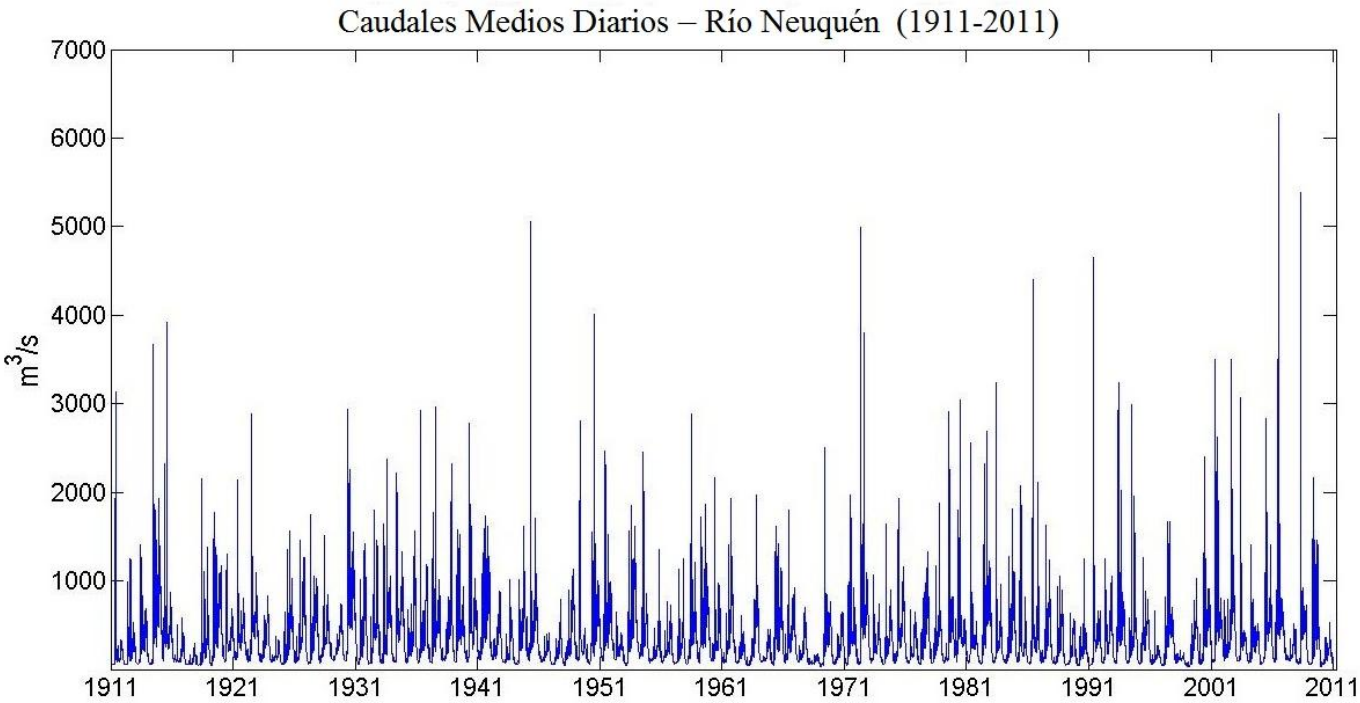


Figura 1: Serie temporal de caudales medios diarios del río Neuquén (1911–2011).
Figure 1: Signal data of daily mean flow values of the Neuquén River (1911–2011)

Características de la Cuenca

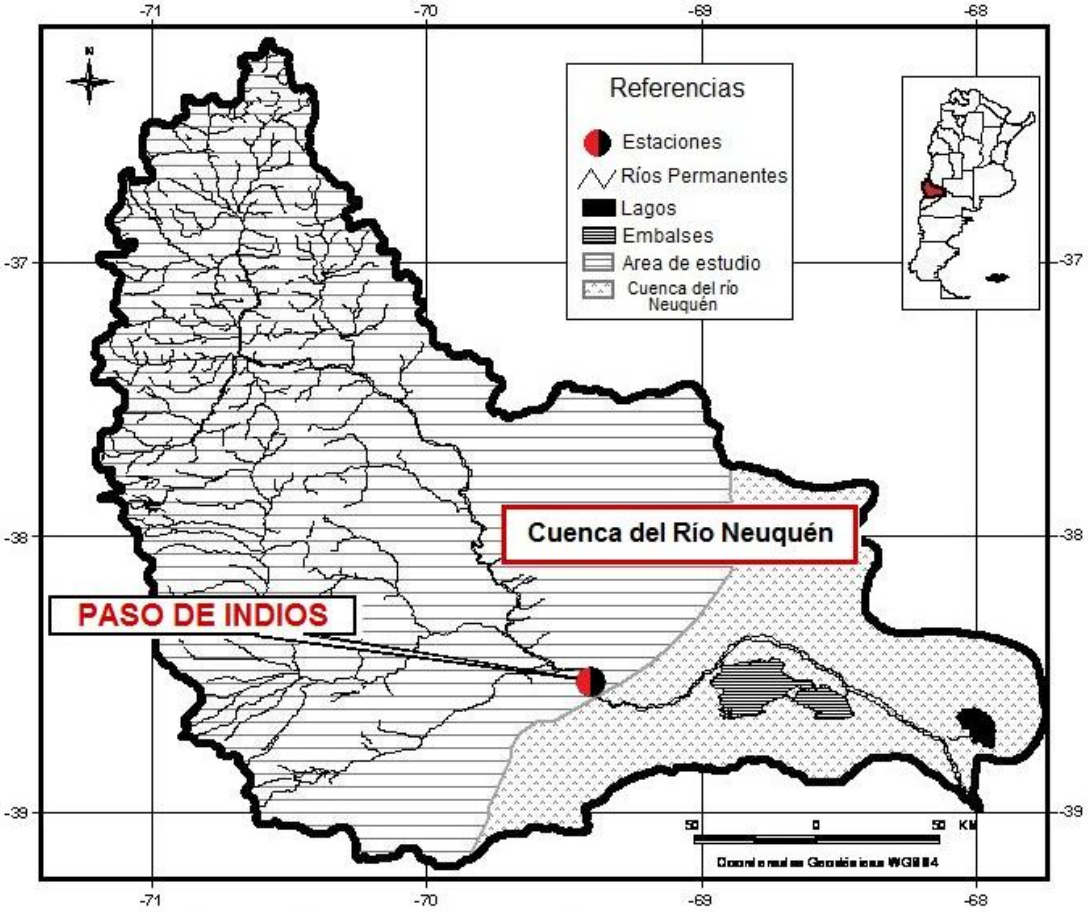
La cuenca del río Neuquén (Fig. 2 (a)), con cierre en la estación Paso de los Indios, presenta un régimen hidrológico con año hidrológico abril–marzo y un área de 30.843 km^2. La obra hidráulica más importante es el Complejo Cerros Colorados-Planicie Banderita que tiene como principal objetivo la regulación de caudales máximos que podrían afectar a la ciudad de Neuquén, y como otros objetivos la generación hidroeléctrica y el riego, para lo cual cuenta con el azud Ballester. El régimen de alimentación es de característica pluvio–nival, predominando en toda la región un máximo muy acentuado de precipitaciones en el período de invierno. El hidrograma anual presenta dos máximos, producidos por procesos de precipitación en el período junio–agosto y por fusión en octubre–diciembre, como puede observarse en el hidrograma para el periodo 1960−1990 (Fig. 2 (b)).

La distribución estacional de los escurrimientos, muestra que el mayor porcentaje se encuentra en el período de fusión octubre-diciembre (42.3 %). Los valores estimados decrecen para los restantes trimestres: en julio-setiembre (27.5%), siendo aún menores los aportes para los períodos enero-marzo (12.1 %) y abril-junio (18.1 %). Además, el trimestre octubre-diciembre presenta el menor coeficiente de variación (0.38) seguido por julio-septiembre (0.44); los restantes coeficientes de variación son: enero-marzo (0.56) y abril-julio (0.60).

Las precipitaciones más importantes, del orden de 3.000 mm anuales, ocurren en la parte alta de la cordillera, en el límite con Chile, mientras que en la parte oriental de la cuenca, la precipitación media anual es sólo 200 mm. Esta fuerte variación es causada por la pérdida de gran parte de la humedad de las masas de aire en la barrera cordillerana, que se interponen entre uno y otro extremo de la cuenca.

Una parte importante de estas precipitaciones ocurre en forma de nieve y se acumula en la parte más alta de la cuenca. La componente de la precipitación que ocurre en la zona media y baja de la misma produce la onda invernal del hidrograma que se caracteriza por presentar un caudal máximo de gran magnitud con relación a su volumen. Las mayores precipitaciones ocurren en el invierno, donde se registran alrededor del 80 al 90% de las precipitaciones totales del año.

a)



Fuente: Sandra L. Flores, 2012. Inst. Nac. del Agua -DSH. Sobre la base del Atlas Digital de los Recursos Hídricos Superficiales de la República Argentina, INA- SSRRHH, 2002.

b)

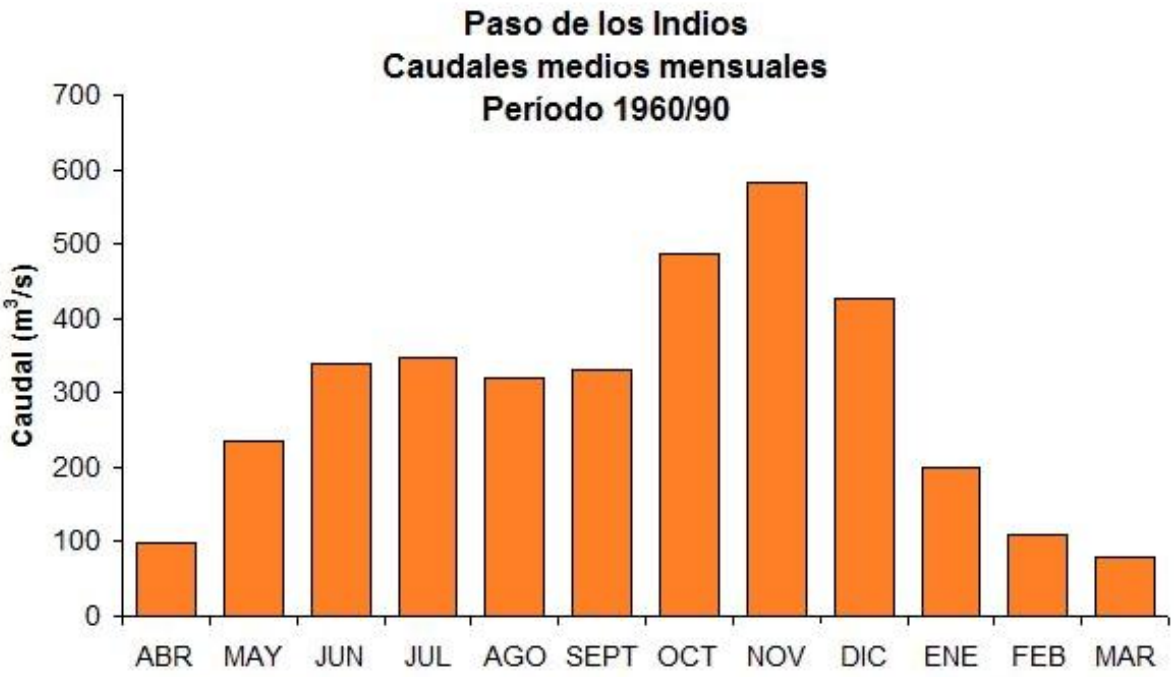


Figura 2: (a) Cuenca del río Neuquén. (b) Hidrograma correspondiente al período 1960–1990.
Figure 2: (a) Basin of Neuquén river. (b) Hydrogram of the time-period 1960–1990.

MARCO TEÓRICO

La idea de usar medidas multifractales en geofísica es muy extendida Mandelbrot (1989) y llega hasta hoy (Schertzer y Lovejoy, 2011). Una de las más usuales y estudiadas es la denominada *multinomial*; por estar generada mediante un sencillo proceso replicativo, en el cual un conjunto se fragmenta en componentes cada vez más pequeñas, y la medida (de probabilidad) definida en aquél, se va "repartiendo" de acuerdo a una regla fija, de manera que en el "límite" del proceso queda definida una medida *autosimilar*. Tales procesos son llamados *procesos multiplicativos* o *cascadas*, y son un paradigma importante en la teoría de medidas multifractales y sus aplicaciones (Evertsz y Mandelbrot, 1992).

Cascadas Multinomiales

Sea $m \geq 2$ un número natural, y sea $I = [0,1] = \{x \in R: 0 \leq x \leq 1\}$ el segmento unitario de la recta real. Se define sobre I una medida de probabilidad multinomial, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$, donde los pesos p_j satisfacen $\sum_j p_j = 1$, de la siguiente forma:

- En el paso 1, dividimos *I* en *m* partes iguales, $I_j^1 = \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right)$, $1 \leq j \leq m$, cada una de longitud $\frac{1}{m}$.
- A cada una le asignamos la medida, $\mathbf{p}(I_j^1) = p_j$, $1 \leq j \leq m$.
- De manera recurrente, en el paso k, dividimos cada sub-intervalo, I_j^{k-1}, en *m* partes iguales $I_j^k = \left[\frac{j-1}{m^k}, \frac{j}{m^k}\right)$, $1 \leq j \leq m^k$, cada una de longitud $\frac{1}{m^k}$.
- A cada uno le asignamos la medida, $\mathbf{p}(I_j^k) = p_{r(j)}\mathbf{p}(I_j^{k-1})$, donde $0 \leq r(j) \leq m$, y $j \equiv r(j) \bmod(m)$.

Para cada paso *k*, la *cascada multinomial* es representada en los puntos jm^{-k} por la sucesión finita de longitud m^k

$$v_j^k = p_1^{\lambda_{j,1}^k}\, p_2^{\lambda_{j,2}^k} \cdots\, p_m^{\lambda_{j,m}^k}, \quad \sum_{l=1}^{m} \lambda_{j,l}^k = 1 \tag{1}$$

En la Figura 3(a), se muestra, a modo de ejemplo, este proceso iterativo para una medida *binomial* en el $[0,1]$, $\mathbf{p} = (p, 1-p)$ con $0 < p < 1$. Se puede apreciar el grado de irregularidad de este tipo de medidas (salvo el caso $p = 1/2$, para el cual la medida **p** coincide con la medida uniforme del intervalo). En la Figura 3(b) se muestran los gráficos de las funciones de distribución acumuladas de medidas binomiales, para distintos valores de *p*.

Espectros Multifractales

En el caso de medidas autosimilares como la del ejemplo anterior, el concepto usual de densidad de la medida carece de sentido y no sirve para caracterizar su irregularidad. Se recurre, entonces, a un concepto un poco más sofisticado, llamado *concentración*, que es la versión "cociente log-log" de la densidad. Se supone el proceso anterior realizado hasta un paso *k* muy grande, se tienen, así, m^k sub-intervalos.

Definición 1: Para $k \gg 1$, la concentración α (o exponente de Hölder) de la medida **p** del sub-intervalo I_j^k, es el valor

$$\alpha = \alpha(I_j^k) = \frac{\log\ \mathbf{p}\,(I_j^k)}{\log\ (m^{-k})}, \quad 1 \leq j \leq m^k \tag{2}$$

Para las medidas multinomiales, se verifica que los valores de α están siempre dentro de un rango $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$, con $0 \leq \alpha_{min} < \alpha_{max} < +\infty$. Así, si **p** es como una medida de "peso" (unitario), se tiene que:

- el exponente α_{min} corresponde a los sub-intervalos o puntos más "pesados" de I,
- el exponente α_{max} corresponde a los sub-intervalos o puntos más "livianos" de I.

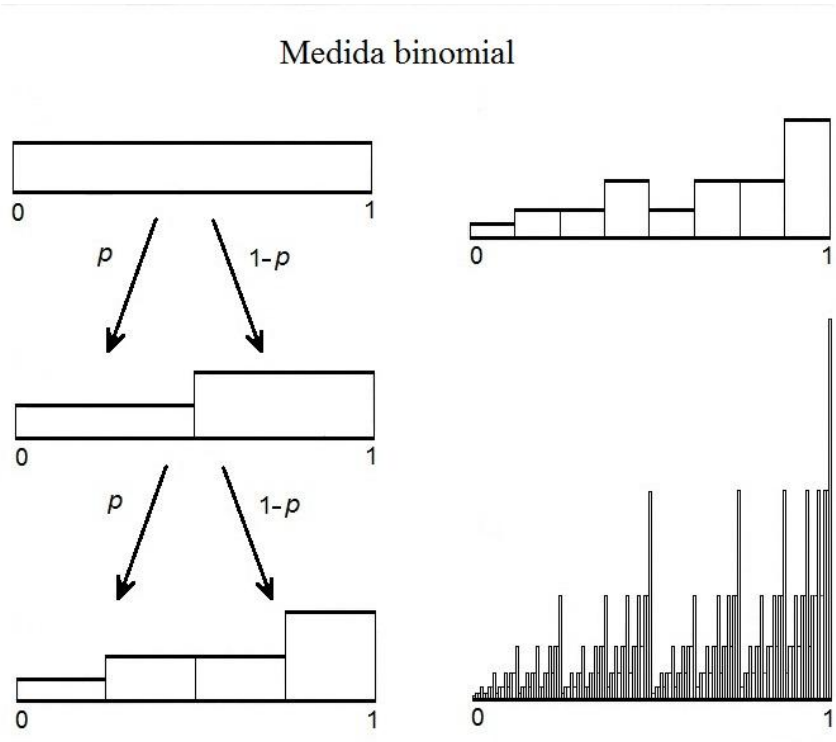
La amplitud del rango, $\Delta_\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min}$, se llama *potencia* de la medida multifractal. Para calcular la distribución de la frecuencia de valores de α, se realiza un histograma:

- se divide $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ en M intervalos de longitud $\delta = \frac{\Delta_\alpha}{M}$,
- se cuenta el número N_{α_i} de subintervalos I_j^k que tienen la misma concentración α_i, es decir,

$$N_{\alpha_i} = \#\left\{\alpha: \alpha \in \left[\alpha_i - \tfrac{\delta}{2}, \alpha_i + \tfrac{\delta}{2}\right)\right\}.\ i = 1, \dots, M.$$

Ahora se descompone la medida **p** en un espectro (multifractal), según sus exponentes de Hölder, llamado *espectro por-definición*.

a)



b)

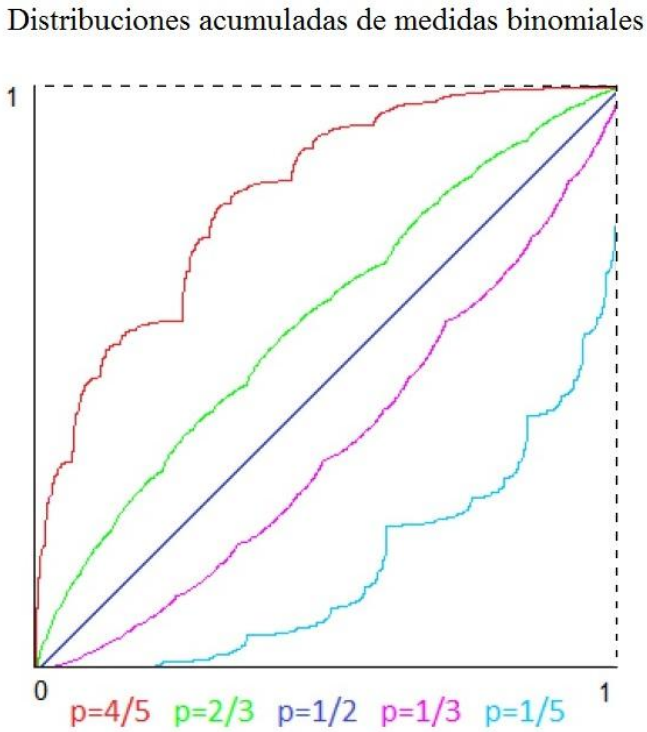


Figura 3: (a) Proceso iterativo generador de una medida binomial multifractal $\mathbf{p} = (\mathrm{p}, 1-\mathrm{p})$ con $\mathrm{p} < 1/2$. (b) Distribución acumulada de **p** para distintos valores de p, las curvas son funciones tipo escaleras de Cantor o devil's staircases, (salvo para $\mathrm{p} = 1/2$ que corresponde a la medida uniforme).

Figure 3: (a) Iterative generating process of a multifractal binomial measure $\mathbf{p} = (\mathrm{p}, 1-\mathrm{p})$ with $\mathrm{p} < 1/2$. (b) Cumulative distribution of **p** for different p values, the curves are Cantor´s staircases or devil's staircases (except for $\mathrm{p} = 1/2$ that corresponds to the uniform measure).

Definición 2: El Espectro Multifractal por–definición, f_D , de la medida **p,** está dado por los valores

$$f_D(\alpha_i) = \frac{\log N_{\alpha_i}}{\log\,(m^k)}\,, \qquad 1 \le i \le M \tag{3}$$

La función f_D puede interpretarse como la "dimensión fractal" del subconjunto de *I* formado por puntos de igual (o aproximada) concentración de valor α.

Otra manera de obtener un espectro multifractal de la medida **p**, es usando el *método de los momentos* (Evertsz y Mandelbrot, 1992). Éste es el más usado en las aplicaciones por ser de implementación más mecánica. Está basado en la *función de partición* (por analogía con la teoría del equilibrio en termodinámica), o *función de momentos de la medida*. Para un parámetro $q \in \mathbb{R}$, y un paso $k \gg 1$, se definen:

$$S(q,k) = \sum_{j=1}^{m^k} \mathbf{p}(I_j^k)^q\,, \tag{4}$$

y la *función de escala*

$$\tau(q) = \frac{\log S(q,k)}{\log\, m^{-k}}\,. \tag{5}$$

Definición 3: El Espectro multifractal, f_L, de la medida **p** está dado por las *transformadas de Legendre*

$$\alpha(q) = \frac{d\tau}{dq}(q) \quad \text{y} \quad f_L(\alpha) = \inf_q\,\{\alpha q - \tau(q)\} \tag{6}$$

Características Espectrales

Una de las mayores desventajas del AM es que el EM es muy difícil de estimar correctamente para una serie de datos reales, debido a que éstos son siempre finitos. Por esta razón, existen distintas definiciones de EM (que no son equivalentes), y diferentes métodos para los cuales es más sencilla su estimación numérica. Estos métodos, son, en casi todos los casos, alternativas para estimar el espectro de Legendre f_L, vía la función $\tau(q)$ cuya gráfica sólo permite discernir si se está en presencia de un mono-fractal (línea recta), o de un multifractal (curva convexa). El espectro f_D ofrece una descripción más geométrica de la estructura de singularidad de la medida involucrada, siendo más "sensible" a las posibles variaciones de sus inhomogeneidades. En cambio, el cálculo de f_L involucra cantidades promediadas, su definición implica que la gráfica de la función $f_L(\alpha)$ es, siempre, una curva suave y convexa hacia abajo ("∩"). Luego, su uso a veces conlleva una severa pérdida de información, ya que f_L arroja una sobreestimación de los verdaderos valores dimensionales. Por ejemplo, en ciertos casos, f_D refleja la presencia de fenómenos de *bi-multifractalidad*, o *poli-multifractalidad*, lo que es incapaz de hacer f_L, debido a su convexidad. Para las medidas multinomiales, es sabido que los gráficos de ambos espectros (f_D y f_L) son coincidentes. Sin embargo (y sobre todo) para "medidas naturales" o empíricas, éstos no suelen coincidir (y hasta pueden diferir mucho). Lo que se tiene, en el caso general, es que $f_D \le f_L$, siendo f_L la cápsula convexa de f_D .

Para ilustrar lo dicho hasta aquí, se muestra un sencillo ejemplo teórico modelo, en donde se modifica un poco la medida sobre *I*, de dos maneras: en un caso, "mezclando" dos medidas binomiales $\mathbf{p} = (p, 1-p)$ y $\mathbf{p'} = (p', 1-p')$ con $p \ne p'$, por ejemplo tomando $\frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{p'})$. En un segundo caso, "agrupando" dos de ellas, por ejemplo, tomando $\frac{1}{2}\mathbf{p}$ en $[0, 1/2]$ y $\frac{1}{2}\mathbf{p'}$ en $[1/2,1]$. En la Figura 4, se puede observar cómo estas simples variaciones producen, en ambas situaciones, dos EM f_D y f_L con las propiedades mencionadas, y bien distintos entre sí (Lévy-Véhel, 1996), donde además, se ve que la gráfica de f_D no es convexa, sino que está formada por dos de ellas, como "superponiendo" dos espectros. Esto es porque que f_D describe un fenómeno de bi-multifractalidad, debido a la presencia de una medida "compuesta".

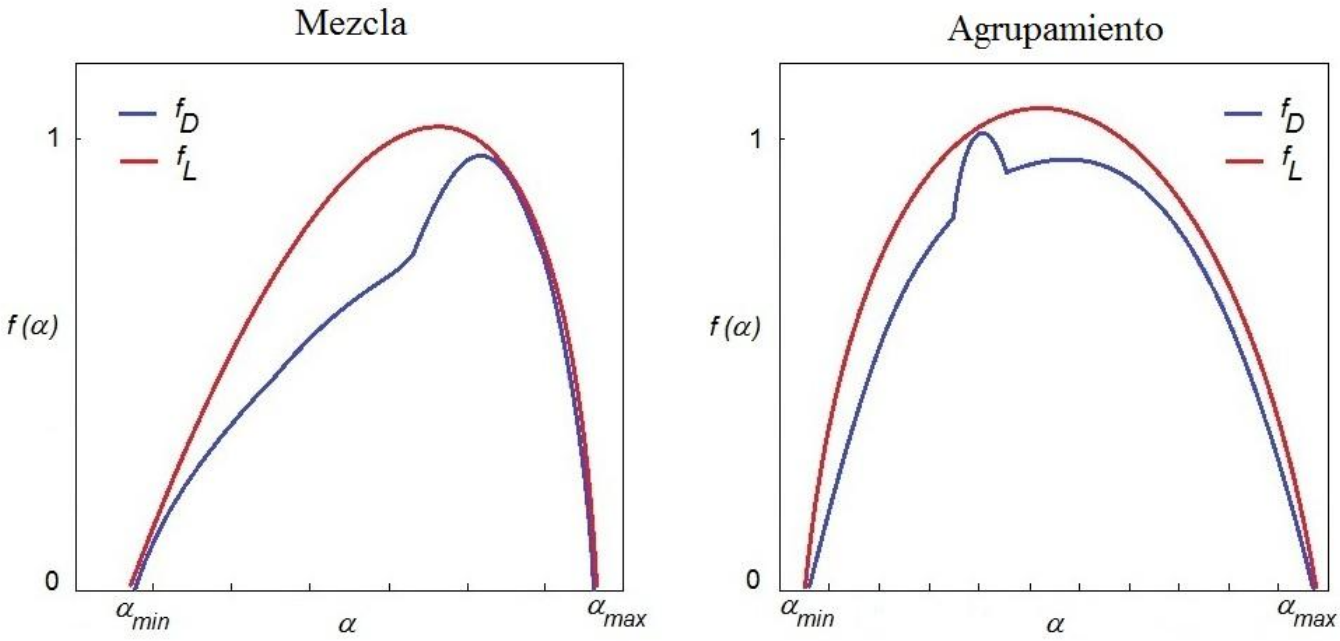


Figura 4: Espectros f_D (azul) y f_L (rojo) para los casos: mezcla de dos medidas binomiales (izquierda), y agrupamiento de dos medidas binomiales (derecha).
Figure 4: f_D (blue) and f_L (red) spectra for the cases: mixing of two binomial measures (left), and lumping of two binomial measures (right).

Parámetros más significativos a considerar de f_L y f_D.

- α_{min} y $f(\alpha_{min})$, α_{max} y $f(\alpha_{max})$
- $\alpha(f_{max})$ y f_{max} → máximo del gráfico
- $q = 1,\ \alpha(1) = f(\alpha(1))$ → dimensión de entropía (tangencia con la recta $y = x$)
- $q = 2,\ f(\alpha(2))$ → dimensión de "correlación" $\left(f(\alpha(2)) < f(\alpha(1))\right)$
- $\Delta_\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min}$ → *potencia* del multifractal

MODELO APLICADO

Se propone un modelo de comportamiento multifractal, basado en procesos del tipo cascadas multinomiales. Se considera el intervalo de tiempo $[1, N]$ normalizado al segmento unitario $[0,1]$, y una medida $\mathbf{p}$ allí, de la siguiente manera:

- $\mathbf{v} = \{v_i\}_{1 \le i \le N}$ → serie temporal en el período $[1, N]$,
- $\mathbf{w}(N) = \sum_{i=1}^{N} v_i$ → caudal total de ese período $[1, N]$,
- $p_i = v_i / \mathbf{w}$ → caudales "relativos",
- $\mathbf{p} = \{p_i\}_{1 \le i \le N}$ → medida de proporción o "pesos".

Así, por analogía con la ec. (1), la ec. (2) de la definición 1, y la ec. (3) de la definición 2, obtenemos:

- $\alpha(i) = \frac{\log p_i}{\log\ (1/N)}$ → exponente de Hölder o concentración de la medida $\mathbf{p}$ en el punto i,
- $f_D(\alpha) = \frac{\log N_\alpha}{\log N}$ → espectro por-definición de la medida $\mathbf{p}$,

y por analogía con la ec. (4), la ec. (5), y la ec. (6) de la definición 3:

- $S(q) = \sum_1^N {p_i}^q$ → función de momentos,
- $\tau(q) = \frac{\log S(q)}{\log\ (1/N)}$ → función de escala,

- $\alpha(q) = \frac{d\tau}{dq}(q) = \frac{1}{\log(1/N)} \frac{\sum_1^N p_i{}^q \log p_i}{\sum_1^N p_i{}^q}$ → exponente de Hölder en función de q,
- $f_L(\alpha(q)) = \inf_q\{\alpha q - \tau(q)\}$ → espectro f_L de la medida $\mathbf{p}$ en función de q.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la Figura 5(b) se muestra la función $\tau(q)$ calculada para la señal completa (total de $N = 36525$ días), cuya gráfica (línea curvada) revela que se está frente a un fenómeno multifractal (múltiples exponentes de singularidad) y no mono-fractal (un solo exponente de singularidad) lo que permite afirmar, en primera instancia, que el modelo aplicado es adecuado. Los correspondientes gráficos de los dos espectros f_D y f_L (Fig. 5(b)), muestran que la curva del espectro f_D no es convexa ya que tiene dos máximos locales. Está formada por dos componentes (o tres), lo que refleja la presencia de una medida **p** "mixta" o compuesta por otras medidas involucradas (como en el modelo de la Figura 4). La bi-multifractalidad describe la convivencia de regímenes de comportamiento con distribuciones bien distintas. Se pueden identificar dos tramos: el de la izquierda, asociado a los exponentes de Hölder más bajos, los cuales corresponden a los valores de caudales más altos de la serie, y el tramo de la derecha asociado a los exponentes de Hölder más altos, correspondientes a los caudales más bajos.

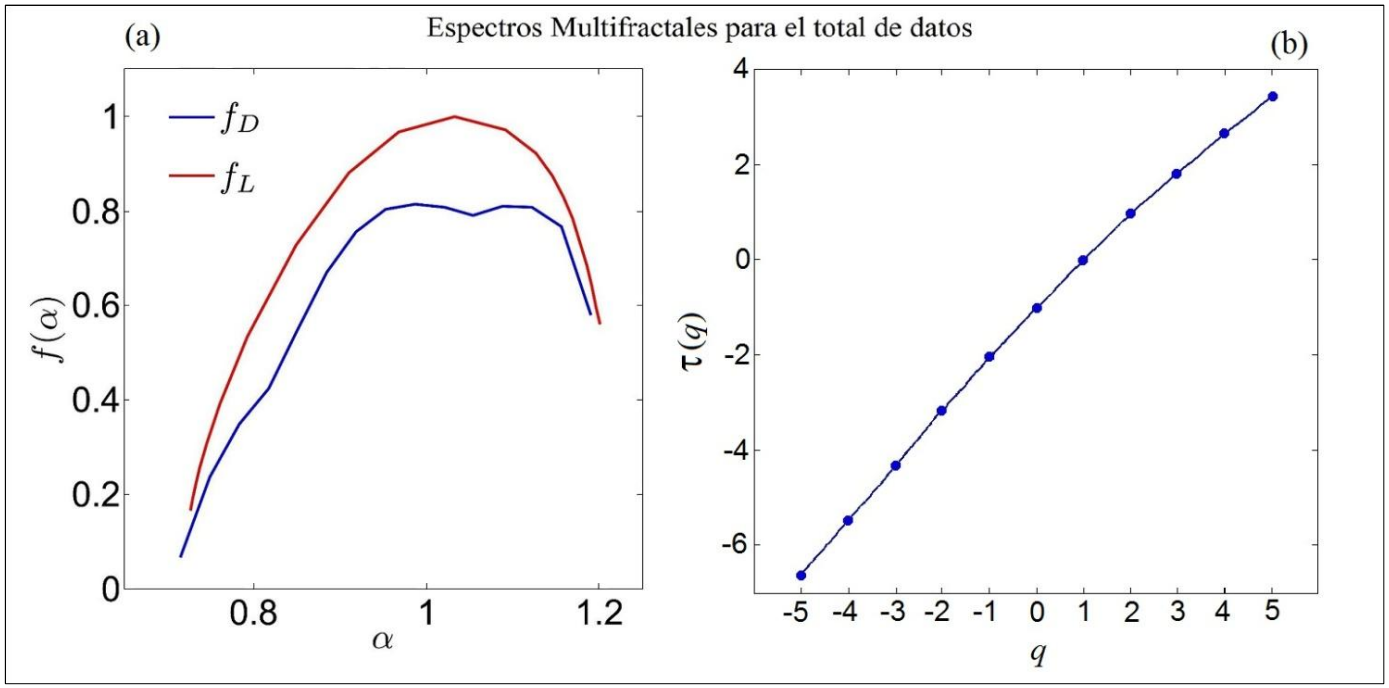


Figura 5: (a) Espectros f_D y f_L para la señal completa, $\mathbf{v} = \{v_i\}_{1 \leq i \leq N}$, con $N = 36525$ días. (b) Gráfico de τ en función del parámetro q, $-5 \leq q \leq 5$.
Figure 5: (a) f_D and f_L spectra for the whole signal, $\mathbf{v} = \{v_i\}_{1 \leq i \leq N}$, with $N = 36525$ days. (b) Graphic of τ as function of the parameter q, $-5 \leq q \leq 5$.

En la Figura 6 se observa, en una primera aproximación, gráficos cualitativamente semejantes al de la Figura 5(a). Se ha comprobado que esta semejanza puede observarse, a su vez, si se consideran intervalos de tiempo distintos (décadas, lustros, años), y también separando la señal en dos subseries asociadas a los regímenes de verano e invierno respectivamente. Esto indica una característica de *autosemejanza estadística* de la serie global y, por lo tanto, del fenómeno de la relación precipitación-caudal en un régimen pluvio-nival.

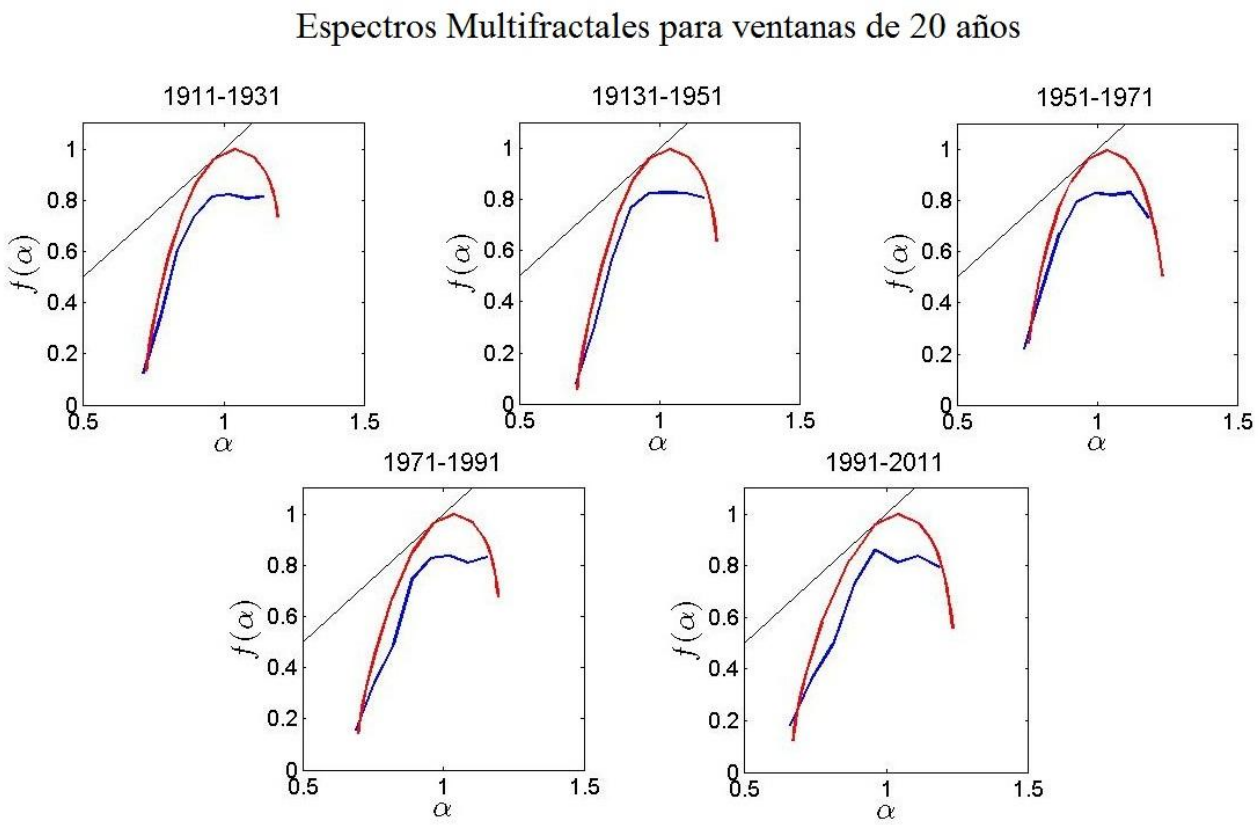


Figura 6: Espectros f_D (azul) y f_L (rojo) de las señales correspondientes a las cinco subseries de veinte años. La diagonal es la recta identidad.

Figure 6: f_D (blue) and f_L (red) spectra of the signals corresponding to the five subseries of twenty years. The diagonal is the identity line.

Los gráficos muestran que el fenómeno de bi-multifractalidad presente al comienzo del siglo, se atenúa en la parte central de la señal (1951−1971), para manifestarse de manera más acentuada hacia la actualidad. Este hecho está indicando un cambio cualitativo en el comportamiento de la medida **p** (o en las medidas que la componen), es decir, en el comportamiento de los regímenes de invierno (caudales más altos) y de verano (caudales más bajos).

En la Figura 7(a) se muestran las distribuciones acumuladas de **p** para cada década. Este indicador señala la presencia de cambios cualitativos de la medida subyacente en las últimas décadas. Por analogía con el modelo de la Figura 3(b) se calculó la diferencia entre las áreas de las curvas y la diagonal $y = x$ (medida uniforme) representándose en la Figura 7(b). Se puede observar un cambio abrupto entre las década 1971−81 y 1981−91.

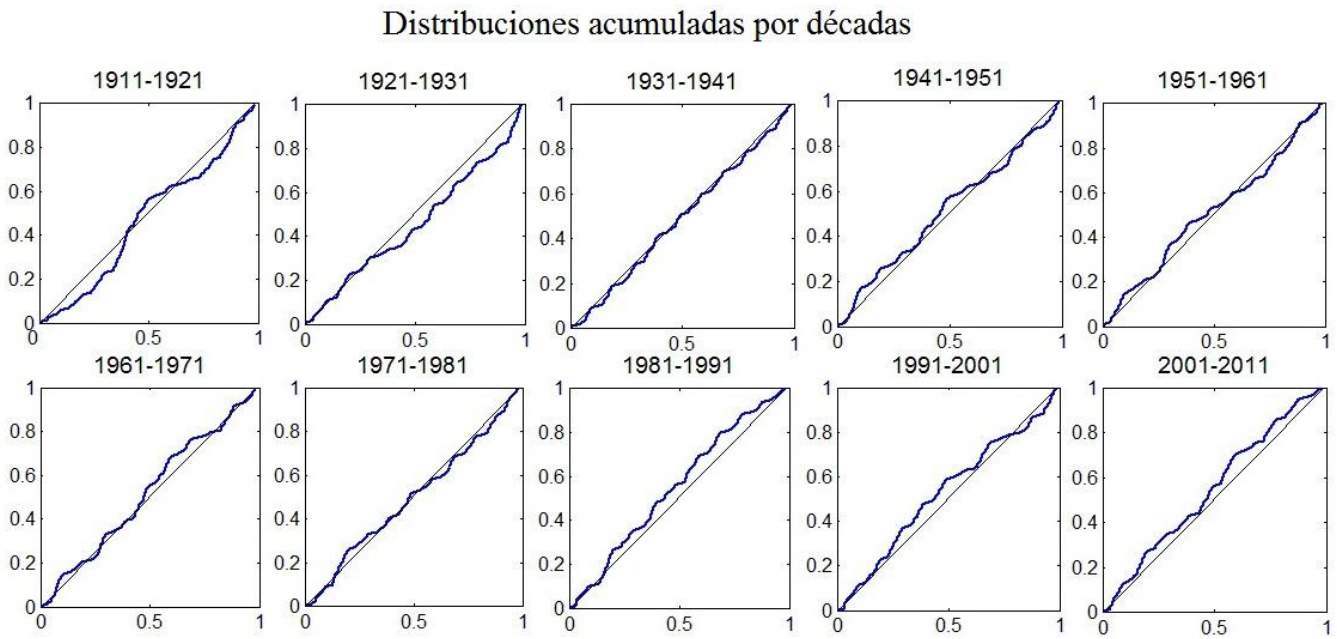
Exponente de Hurst e índice de predictibilidad

El exponente de Hurst, H $(0 < H < 1)$, se utiliza para evaluar propiedades de correlación de largo plazo en series temporales. Fue propuesto por Hurst, quien, mediante un estudio basado en la función de autocorrelación de una señal y el comportamiento asintótico de su rango reescalado, lo definió como parámetro para estudiar aspectos de persistencia a largo plazo de los procesos hidrológicos (Hurst, 1951). Así, si $H = 0.5$, el proceso se considera no correlacionado y por lo tanto impredecible; en cambio, si $\mathrm{H} > 0.5$, el proceso es *persistente* en tanto que presenta correlación positiva, y si $H < 0.5$, el proceso *es antipersistente* en tanto presenta correlación negativa. En estos dos últimos casos, el proceso se considera más predecible a medida que H se aleja de 0.5.

Rangarajan y Sant (1997, 2004) han introducido un índice de predictibilidad climática sencillo, $IP = 2|H - 0.5|$, como metodología alternativa para estudiar la dinámica climática.

Asumiendo que las subseries definidas por décadas pueden modelarse como procesos estocásticos estacionarios, se aplicó el análisis de rango reescalado para obtener los diez exponentes de Hurst y los correspondientes IP para cada una. En la Tabla 1 se muestran estos valores y los parámetros estadísticos básicos: la media, *Qm*, de caudales medios diarios (m^3/s) y el correspondiente desvío estándar, σ.

a)



b)

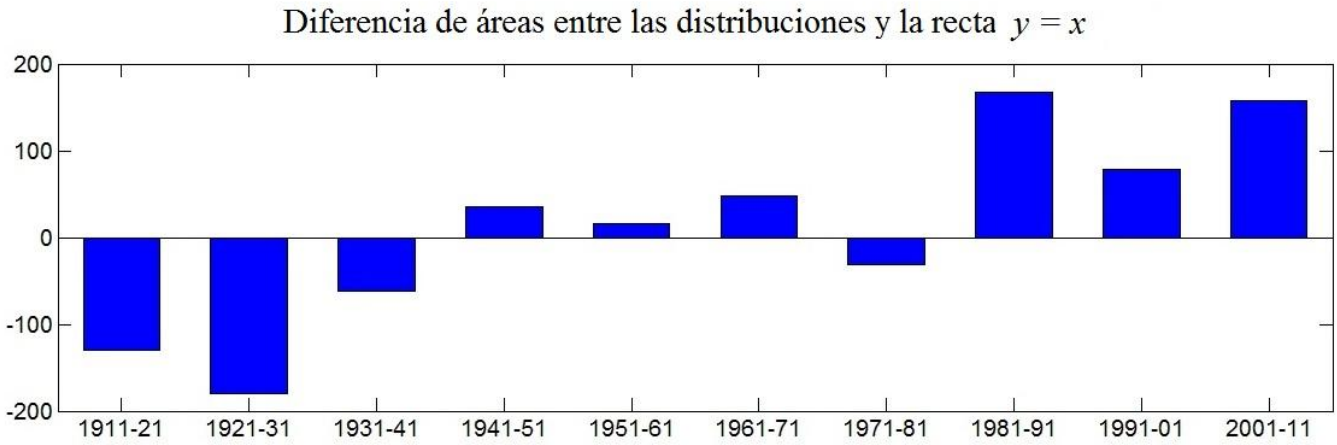


Figura 7: (a) Distribuciones acumuladas de la medida **p** para las diez décadas. (b) Diferencia de áreas entre cada función de distribución y la recta identidad (distribución uniforme) (ver Figura 4(b)).

Figure 7: (a) Cumulative distributions of the measure **p** for the ten decades. (b) Difference of the areas between each distribution function and the identity line (uniform distribution) (see Figure 4(b)).

Los resultados señalan que en todos los casos $\mathrm{H} > 0.5$, lo que indica una fuerte persistencia de largo plazo. Se observa un significativo aumento, tanto de la media como del desvío en la última década, teniendo en cuenta que los valores de las nueve estimaciones anteriores oscilan alrededor de 1900 m^3/s, y *Qm* crece a más de 3000 m^3/s para 2001-2011. El incremento de σ para esta última década está en correspondencia con el aumento de la persistencia *H*. Esto solo ya es un indicador de un cambio importante en el patrón de comportamiento del río Neuquén. La variación del IP, al tener una relación lineal con respecto a *H*, también refleja un aumento en la predictibilidad para las últimas décadas.

Década	1911-1921	1921-1931	1931-1941	1941-1951	1951-1961	1961-1971	1971-1981	1981-1991	1991-2001	2001-2011
Qm (m³/s)	1922,6	1622,6	2197,1	1946,2	1683,2	1267,9	2343	2137,36	1970,45	3040,25
σ	1272,68	847,81	581,88	1534,38	720,94	868,45	1400,12	1192,68	1367,94	2310,73
H	0.88±0.02	0.88±0.02	0.84±0.04	0.88±0.04	0.88±0.03	0.89±0.02	0.87±0.02	0.83±0.03	0.81±0.03	0.85±0.03
IP	0.76±0.04	0.76±0.04	0.68±0.08	0.76±0.08	0.76±0.06	078±0.04	0.74±0.04	0.66±0.06	0.62±0.06	0.70±0.06
$\Delta\alpha(fD)$	0,5270	0,4869	0,4717	0,5705	0,4968	0,5315	0,5587	0,5590	0,6033	0,6514
$\Delta\alpha(fL)$	0,5132	0,4584	0,4446	0,5489	0,4670	0,5086	0,5323	0,5325	0,5743	0,6314

Tabla 1: Valores de los parámetros por décadas: Qm (media de caudales), σ (desvío estándar), H (exponentes de Hurst), IP (índice de predictibilidad), $\Delta_\alpha(f_D)$ y $\Delta_\alpha(f_L)$ (potencia del multifractal para cada espectro).

Table 1: Parameter values by decades: Qm (mean of flows), σ (standard deviation), H (Hurst exponents), IP (predictability index), $\Delta_\alpha(f_D)$ and $\Delta_\alpha(f_L)$ (multifractal's strength for each spectrum).

En la base de los espectros de la Figura 6 se observa un aumento importante de la amplitud Δ_α para el último período. Para una descripción más precisa se ha calculado y graficado Δ_α para los dos espectros, separando la señal por décadas, como indican la Tabla 1 y la Figura 8. f_L y f_D muestran una sensibilidad similar a la variación de este parámetro. Es interesante observar que la variación de Δ_α no se correlaciona con la del IP (Tabla 1 y Figura 8). El aumento significativo de esta amplitud en las últimas décadas, equivale a un incremento en el rango de valores de caudales observados ya que indica una mayor distancia entre los caudales máximos y mínimos y por lo tanto de eventos extremos, lo que concuerda con el incremento del desvío σ. Pero también, y aquí radica la importancia de este parámetro, es que los nuevos valores de eventos extremos no son aislados, sino que tienen *estructura autosemejante* y su distribución se manifiesta en todas las escalas, producto de la variedad y riqueza de los exponentes de singularidad de la medida **p**. Esto indica claramente un cambio, a partir de los años '70 del siglo pasado, en la respuesta hidrológica para las últimas décadas. Esta variación podría indicar una mayor dificultad en la predicción de los eventos extremos, dado que un espectro de base más amplia indicaría una mayor incertidumbre en su estimación.

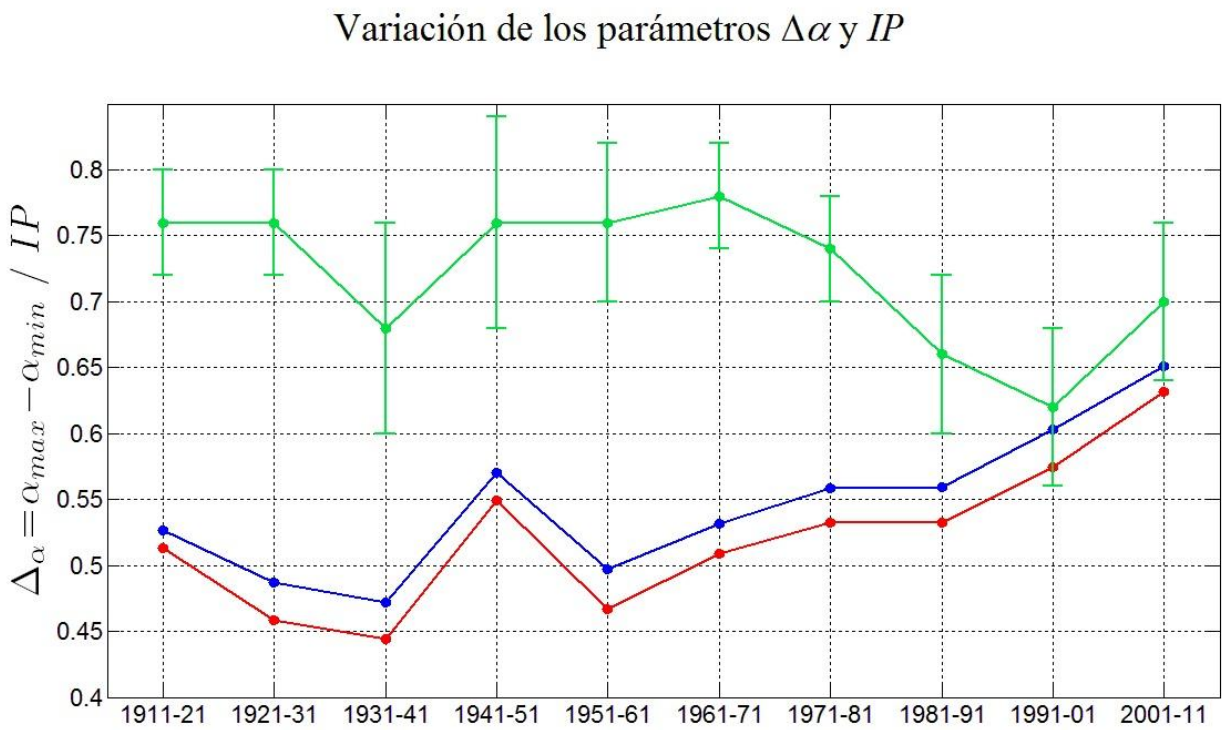


Figura 8: Variación de la amplitud $\Delta_\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min}$ (potencia del multifractal) por décadas, para f_L (rojo) y f_D (azul), y del índice de predictibilidad IP (verde).

Figure 8: Variation by decades of the range $\Delta_\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min}$ (multifractal's strength), for f_L (red) and f_D (blue), and predictability index IP (green).

Por otro lado, un parámetro relevante del espectro f_L, es el correspondiente a $q = 2$, pues el valor $f_L(\alpha(2))$ está asociado con la *dimensión de correlación* del fractal subyacente ($[0,1]$ en este caso). Este parámetro no-lineal es muy usado en señales en relación a su reconstrucción geométrica en un espacio de fases, y ha mostrado ser un indicador útil en señales patológicas.

En la Figura 9 se presentan los exponentes de Hurst junto con las dimensiones de correlación calculadas para períodos de veinte años. Puede observarse la estrecha cercanía entre ambas listas de valores, pero el descenso en los valores de $f_L(\alpha(2))$ indicaría una mayor incertidumbre o incremento de la aleatoriedad del proceso.

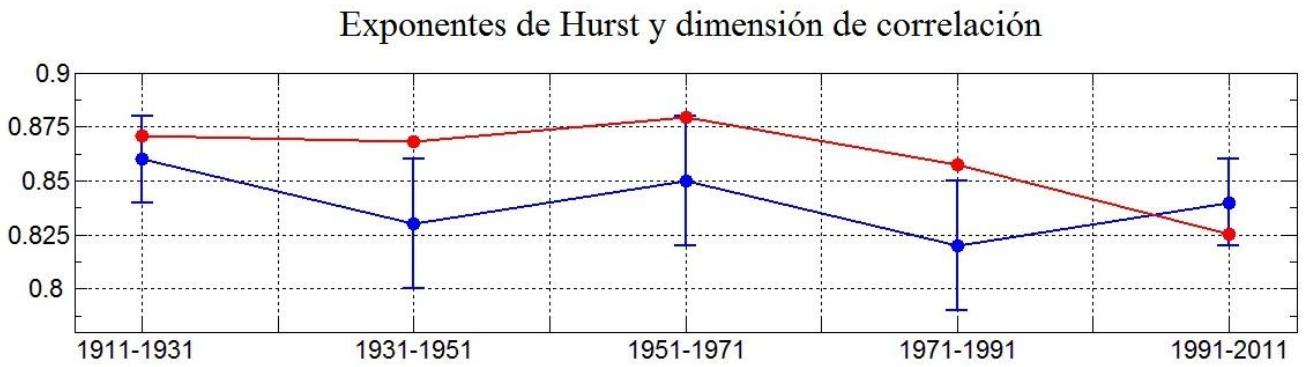


Figura 9: Variación de los exponentes de Hurst para los cinco períodos de veinte años (azul) y dimensiones de correlación para las mismas subseries (rojo, valores: 0.8707, 0.8680, 0.8793, 0.8573, 0.8254).

Figure 9: Variation of the Hurst esponents for the five periods of twenty years (blue) and correlation dimensions for the same subseries (red, values: 0.8707, 0.8680, 0.8793, 0.8573, 0.8254).

CONCLUSIONES

Los resultados del estudio de una extensa serie de caudales medios diarios observados en la cuenca del río Neuquén con la teoría multifractal definen una nueva visión cuantitativa de las características de la evolución temporal de su respuesta hidrológica. El estudio basado en medidas multinomiales y en el cálculo de dos espectros multifractales diferentes para describir el proceso hidrológico, permitió mostrar el efecto que las distintas ventanas temporales consideradas tienen sobre la forma de ambos espectros, mostrando la autosemejanza del proceso.

Las distribuciones acumuladas de las medidas multinomiales permitieron observar cambios a través del tiempo, sobre todo en las últimas décadas. El EM f_D, resultó ser un método con mayor sensibilidad que el EM f_L, capaz de describir la complejidad y variabilidad de la medida subyacente, ya que pudo identificar claramente dos componentes, separando los caudales según los regímenes de precipitación y fusión, mostrando así que la medida es en realidad de tipo bi-multifractal y mostrando su evolución en el tiempo.

Se mostró que, a pesar de que el *IP* señala un incremento de la predictibilidad para el último período, Δ_α muestra, en cambio, que hay un incremento en los valores de eventos extremos, y que éstos han “enriquecido” su estructura para el mismo período, mostrando que hay un cambio de patrón de comportamiento en el régimen de caudales (que habrá que estudiar su evolución con nuevos datos), y estableciendo así una advertencia sobre la predictibilidad del proceso.

Los cambios detectados gracias al AM son muy significativos, y algunos se manifiestan en escalas interdecadales o mayores, los cuales pueden ser una respuesta natural a los efectos de variabilidad climática de largo plazo que afecta la cuenca de ríos andinos, o pueden ser anomalías debidas a otras causas que se seguirán investigando. A tal fin, este mismo AM se aplicará al estudio de variables hidrológicas de otros ríos andinos para compararlas con los obtenidos en el presente trabajo.

Los conceptos anteriores muestran la importancia de la identificación precisa de ciertos períodos característicos de una serie hidrológica. Una estimación adecuada de los parámetros sirve como base para mejorar la predicción de variables hidroclimatológicas, como el comportamiento de eventos extremos. Esta nueva información se podría utilizar para evaluar la vulnerabilidad de obras hidráulicas (por ejemplo de control de inundaciones) cuyos parámetros pudieron ser estimados con la información hidrológica de series temporales cortas y/o que presentaron caudales que fueron superados en las últimas décadas del siglo XX. También sirve para conocer la persistencia de las variables en estudio, y para estimar los parámetros en cuencas que no cuentan con mediciones, lo que redundaría en una mejor operación y manejo de los recursos hídricos.

Agradecimientos. Los autores agradecen la información hidrológica suministrada por la Autoridad Interjurisdiccional de las Cuencas de los ríos Limay, Neuquén y Negro, y por la Subsecretaría de Recursos Hídricos de la Nación. También desean expresar su agradecimiento a los revisores anónimos por las sugerencias hechas que mejoraron la calidad del manuscrito. El trabajo se enmarca en los proyectos: UBACyT 200-20100100135 (2011-2014) y PIP 112-201101-00530 (KE2) (2012-2014).

REFERENCIAS

Dimri, V.P. (Ed.), 2005. Fractal Behaviour of the Earth System. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Douglas, E.M. and A.P.Barros, 2003. Probable maximum precipitation estimation using multifractals: Application in the eastern United States. Journal of Hydrometeorology, 4: 1012–1024.

Evertsz, C.J. and B.B. Mandelbrot, 1992. Multifractal Measures. Appendix B in: Chaos and Fractals by H.O. Peitgen, H. Jürgens and D. Saupe, Springer New York, pp. 849.

Gómez, J.D. y G. Poveda, 2008. Estimación del espectro multifractal para series de precipitación horaria en los Andes Tropicales de Colombia. Rev. Acad. Colomb. Cienc., 32(125): 483–502.

Gu, G-F. and W-X. Zhou, 2010. Detrending moving average algorithm for multifractals. Physical Review. E, 82: 011136.

Hurst, H.E., 1951. Long-terms storage capacity of reservoirs. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 116: 770–799.

Jaffard, S., 2004. Wavelet techniques in multifractal analysis. Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoît Mandelbrot, M. Lapidus et M. van Frankenhuijsen Eds., Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, AMS, 2 (Part 2): 91–152.

Kantelhardt, J.W., S.A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, H. Sholomo, A. Bunde and H.E. Stanley, 2002. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. Physica A, 316: 87–114.

Kantelhardt, J.W., D. Rybski, S.A. Zschiegner, P. Braun, E. Koscielny-Bunde, V. Livina, S. Havlin and A. Bunde, 2003. Multifractality of river runoff and precipitation: comparison of fluctuation analysis and wavelet methods. Physica A, 330: 240–245.

Kantelhardt, J.W., E. Koscielny-Bunde, D. Rybski, P. Braun, A. Bunde and Shlomo Havlin, 2006. Long-term persistence and multifractality of precipitation and river runoff records. Journal of Geophysical Research, 111: D01106.

Kavasseri, R. and R. Nagarajan, 2005. A multifractal description of wind speed records. Chaos, Solitons & Fractals, 24(1): 165–173.

Kosciely-Bunde, E., J.W. Kantelhardt, P. Braun, A. Bunde and S. Havlin, 2006. Long-term persistence and multifractality of river runoff records: Detrended fluctuation studies. J. Hydrol., 322: 120–137.

Lashermes, B., S. Jaffard and P Abry, 2005. Wavelet Leader based Multifractal Analysis. Proc. of IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal, 4: 161–164.

Lévy-Véhel, J., 1996. Numerical computation of the Large Deviation Multifractal Spectrum. En: CFIC, Rome.

Lombardo F., E. Volpi, D. Koutsoyiannis, and S. M. Papalexiou, 2013. Just two moments! A cautionary note against use of high-order moments in multifractal models in hydrology. Hydrology and Earth Systems Sciences Discussions, 10: 4627–4654.

Mandelbrot, B. B., 1983. The Fractal Geometry of Nature. W.H. Freeman, New York.

Mandelbrot, B. B., 1989. Multifractal measures, especially for the geophysicist. PAGEOPH, 131: 5–42.

Piacquadio Losada, M. and A. de la Barra. Multifractal spectra of wind velocity data. A publicarse en Energy for Sustainable Development.

Puente, C.E., O. Robayo and B. Sivakumar, 2001. A fractal-multifractal aproach to groundwater contamination. 1. Modeling conservative tracers at the Borden site. Stochastic Enviromental and Risk Assessment, 15: 357–371.

Rangarajan G. and D.A. Sant, 1997. A climate predictability index and its applications. Geophysical Research Letters, 24: 1239–1242.

Rangarajan G. and D.A. Sant, 2004. Fractal dimensional analysis of Indian climatic dynamics. Chaos Solitons and Fractals, 19: 285–291.

Riedi, R., 1998. Multifractals and Wavelets: A potential tool in Geophysics. SEG 1998, Technical Session on Novel Transforms, New Orleans, L.A.

Schertzer, D. and S. Lovejoy, 2011. Multifractals, Generalized Scale Invariance and Complexity in Geophysics. International Journal of Bifurcation and Chaos, 21(12): 3417–3456.

Sivakumar B., 2009, Nonlinear dynamics and chaos in hydrologic systems: latest developments and a look forward, Stochastic Environmental Research and Risk Assessmen, 23(7): 1027–1036

Sivakumar, B. and V.P. Sighn, 2011. Hydrologic system complexity and nonlinear dynamic concepts for a catchment classification framework. Hydrology and Earth System Sciences Discussions, 8: 4427–4458.

Sornette, D., 2004. Critical Phenomena in Natural Sciences—Chaos, Fractals, Self-Organization and Disorder: Concepts and Tools. 2nd.ed. Springer, Berlin.

Svensson, C, Olsson, J. & Berndtsson, R. (1996) Multifractal properties of daily rainfall in two different climates. Water Resources Research, 32(8): 2463-2472.

Tessier Y., S Lovejoy, P Hubert, D Schertzer and S Pecknold, 1996. Multifractal analysis and modeling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions. Journal of Geophysical Research, 101(D21): 26427-26440.

Recibido: 07-09-2013
Aceptado: 24-04-2014