REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión

Gustavo Adolfo Marmolejo Avenia[1], María Teresa González Astudillo[2]
usalgamav@gmail.com , maite@usal.es

[1]*Universidad de Nariño. San Juan de Pasto, Colombia.*
[2]*Universidad de Salamanca. Salamanca. España*

Resumen

El estudio de los fenómenos que subyacen al tratamiento del concepto de área de superficies planas ha sido objeto de especial interés en las últimas décadas. Pero, a pesar de la variedad de investigaciones realizadas y del sin número de cuestiones planteadas la complejidad de su estudio se mantiene latente. En este artículo, se resaltan y caracterizan cuatro frentes de esta complejidad contemplados en la literatura especializada: el tratamiento y conceptualización del área; la conservación del área y su papel en el tratamiento del concepto de área; la medida de cantidades de área, y el área y su articulación con otros conceptos matemáticos. A manera de conclusión, se resalta la necesidad de discriminar un núcleo común que permita abordar en todo su conjunto la diversidad de aproximaciones realizados desde enfoques e intereses distintos. Se considera la visualización como ese núcleo común. Se critica que sea tratada de forma implícita o tangencial, se propone un nuevo enfoque a considerar y se plantean una serie cuestiones a tener en cuenta para describir y comprender la sinergia visualización/tratamiento del área, así como sus posibilidades en el tratamiento del concepto de área.

Palabras claves: Enseñanza de las matemáticas; Área de superficies planas.

Plane surfaces area in the field of mathematics education. State of the matter

Abstract

The study of the phenomena underlying the treatment of the concept of plane surfaces area has been of special interest in recent decades. In spite of the variety of research made and the number of raised questions, the complexity of his study is kept latent. In this article, we highlight and characterize four fronts of this complexity that have been shown in the specialized literature: the treatment and conceptualization of the area; the conservation of the area and his roll in the treatment of the concept of area; the measurement of quantities of area; and the area and his linkage with other mathematical concepts. In conclusion, we highlight the importance of characterizing a common nucleus that allows us to address the great diversity of approaches performed in the literature as a whole. We believe that visualization is the common core; we criticize this cognitive activity to be considered implicitly or tangentially, we propose a new approach and we present some questions to consider to describe and understand area`s synergy visualization/treatment and their potential in the understanding the concept of area.

Keywords: Mathematics education; Area plane surfaces.

L’aire de surfaces planes dans le domaine de l'enseignement des mathématiques. État de la matière

Résumé

L'étude des phénomènes sous-jacents au traitement de la notion d’aire de surfaces planes a été d'un intérêt particulier au cours des dernières décennies. Mais en dépit de la variété des enquêtes et des innombrables questions soulevées, la complexité de leur étude sommeille. Dans cet article, nous mettons en évidence et caractériser quatre fronts cette complexité visé dans la littérature : le traitement et la conceptualisation de l’aire ; la conservation de l’aire et son rôle dans le traitement de la notion d'aire ; mesurer les quantités d'aire et l'aire et sa coordination avec d'autres concepts mathématiques. En conclusion, la nécessité de discriminer un tronc commun autour duquel aborder l'ensemble des approches et des approximations effectuées depuis différents intérêts est mis en évidence. Visualisation de ce tronc commun est considérée. Il est critique que l'on traite implicitement ou tangentiellement. Une nouvelle approche est proposée de considérer et soulève un certain nombre de questions à considérer pour décrire et comprendre la synergie visualisation/traitement de l'aire et leurs possibilités dans le traitement de la notion d'aire.

Mots clés: L'enseignement des mathématiques ; Aire de surfaces planes.

A área de superfícies planas em educação matemática. O estado da questão.

Resumo

O estudo dos fenômenos subjacentes ao tratamento do conceito de área de superfícies planas foi de especial interesse nas últimas décadas. Mas, apesar da variedade de investigações e inúmeras questões levantadas, a complexidade de seu estudo está adormecida. Neste artigo, vamos destacar e caracterizar quatro frentes d'essa complexidade referida na literatura: o tratamento e conceituação d'área; conservação d¡área e seu papel no tratamento do conceito d'área; medida das quantidades d'área, bem como a área e sua coordenação com outros conceitos matemáticos. Em conclusão, é realçada a necessidade de discriminar um núcleo comum em torno do qual a tratar toda a gama de abordagens e aproximações feitas desde diferentes interesses. A visualization e considerada como este núcleo comum. Se facem críticas de que é tratada implicitamente ou tangencialmente, e se debe considerar uma nova abordagem. Levantamse uma série de perguntas a considerar para descrever e compreender a sinergie entre o tratamento / visualización d'área série e seu potencial no tratamento do conceito de área.

Palavras-chave: Educação Matemática; Áreas de superfícies planas.

1. INTRODUCCIÓN

El área de superficies planas (en adelante área) juega un papel relevante en la construcción de otros conceptos matemáticos (fracciones, integración, porcentajes, volumen…) y en el desarrollo de destrezas y habilidades matemáticas (resolución de problemas, razonamientos, argumentaciones, visualización). De ahí que en la mayoría de los programas curriculares se incluyen orientaciones específicas para el tratamiento del área asumiéndose como una de las magnitudes a las que mayor atención se le asigna en los primeros grados de la educación básica (p.e., en los currículos de España y Colombia se contempla en los primeros sietes años de la educación básica). Además, el área es incluida como un objeto de evaluación en muchas pruebas externas (Pisa, TIMSS, Saber).

El área, sin lugar a dudas es un concepto de gran importancia en matemáticas, pero son varios los aspectos que llevan a considerar que las propuestas de enseñanza implementadas tradicionalmente no han logrado avances significativos en torno a su reflexión. Así el bajo nivel de rendimiento de los estudiantes al resolver problemas de área en pruebas externas (De Araújo y Dos Santos, 2009); el elevado número de reportes que resaltan las dificultades que tienen los estudiantes al tratar el área (Zacharos, 2006; Kamii y Kysh, 2006, Marmolejo y Vega, 2012, entre otros); el reconocimiento que tales dificultades persisten de un nivel escolar a otro, incluso en la universidad (Kospentaris, Spirou y Lappas, 2011); el interés actual en la literatura especializada (Zacharos, 2012) y en las instituciones que forman (Roldán y Rendón, 2014) y cualifican (Marmolejo, 2013c) educadores matemáticos en el diseño, aplicación y evaluación de secuencias de enseñanza que promuevan el estudio del área así como el análisis de cómo el área es tratada en los textos escolares de diferentes países (Marmolejo, 2014), son buena prueba de ello.

La investigación educativa ha caracterizado un sin número de elementos que afectan la comprensión de este concepto. Por ejemplo, se considera que "las propuestas de enseñanza tradicionalmente implementadas en las instituciones educativas no tienen en cuenta los variados matices en que se desarrolla el área y no suelen poner de manifiesto su conexión con otras partes de la matemática escolar" (Olmo, Moreno y Gil, 1989, p. 12).

En cuanto a los textos escolares las técnicas que organizan matemáticamente el concepto de área exigen ser organizadas o sistematizadas por los estudiantes (o los profesores) mientras que son escasas las ocasiones en que esas técnicas son desplegadas por el propio texto, así mismo se señala que las tareas relativas a la comparación de áreas brilla por su ausencia (De Araújo y Dos Santos, 2009). Por otro lado, Olmo et al. (1989) afirman que en los textos, tradicionalmente se asume que el alumno descubre por sí mismo el concepto de área y se pasa directamente a su medida, "o bien se define de manera más o menos abstracta la superficie, pero sin realizar actividades orientadas a que se distinga esta cualidad de las restantes o compare objetos respecto a la misma necesidad sin necesidad de medirlo" (p.46). En resumen, los aspectos visuales u holísticos no son considerados en la construcción de este concepto matemático (Pitta-Pantazi y Cristou, 2009) y, por el contrario, la atención se restringe a cuestiones aritméticas, dejándose de lado la verdadera naturaleza del concepto en consideración (MEN, 1998).

Es claro que el área es y ha sido un concepto de especial interés en el campo de la investigación en educación matemática, aunque si bien los resultados obtenidos hasta el momento son importantes para comprender el porqué de su complejidad, en sí mismos no han permitido transformar su instrucción ni modificar positivamente su aprendizaje. Es necesario, pues, el desarrollo de nuevas investigaciones que desde tendencias distintas aporten nuevos elementos de reflexión para comprender de qué forma puede ser abordado el concepto de área; por ello, la caracterización de los distintos enfoques en que la investigación educativa ha contemplado este concepto matemático constituye un paso a considerar.

Tomando en consideración este estado de cosas el propósito de este escrito es presentar un recorrido que describa cómo el área se ha contemplado en la investigación en educación matemática. La revisión de investigaciones sobre el concepto de área que hemos realizado permite discriminar que para su estudio se han tenido en cuenta cuatro enfoques distintos: pautas para el tratamiento y conceptualización del área en la escuela; conservación del área (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1981); medida directa (replicación de la unidad de medida sobre la superficie a medir o conteo de las partes iguales en que la figura medida ha sido fraccionada), indirecta (aplicación de fórmulas) y transición de un tipo de medida a otro; y, por último, la articulación del área con otras magnitudes y conceptos matemáticos. En lo que sigue describimos en la primera parte del artículo los estudios que caracterizan cada una de estas tendencias de investigación y, a continuación, en el apartado de conclusiones, estableceremos algunas consideraciones generales y propondremos un nuevo enfoque, que desde nuestro punto de vista, promueve una mejor comprensión de los fenómenos que subyacen al concepto de área.

2. PAUTAS PARA EL TRATAMIENTO Y CONCEPTUALIZACIÓN DEL ÁREA EN LA ESCUELA

Desde hace varias décadas y desde posturas distintas la investigación en el campo de la Educación Matemática ha generado pautas para el tratamiento del concepto de área en la escuela. Así, un gran número de estudios ha establecido jerarquías sobre la construcción del concepto de área. Exponentes de esta tendencia son los trabajos de Piaget et al. (1981) y Wagman (1975). En el primer caso, se postula que el aprendizaje del área debe pasar por diferentes etapas de desarrollo (primitiva, intuitiva, operacional y analítica) y que debe centrarse exclusivamente en las operaciones de conservación y transitividad. En el segundo caso, se establecieron cuatro etapas en su desarrollo, a saber: 1) habilidad de aplicar el conjunto entero de axiomas en casos perceptivamente fáciles y difíciles, 2) aplicación de axiomas en casos simples donde la exigencia perceptiva es compleja o los estudiantes no son capaces de resolver la problemática planteada, 3) aplicación de algunos, pero no todos, los axiomas (los estudiantes de esta etapa conservan el área) y 4) si se considera el concepto de conservación de área pero no se aplica en todas las situaciones posibles y se consideran algunos de los axiomas de la medida del área.

Osborne (1976, en Olmo et al, 1989) asumiendo la existencia de una axiomática común entre el área y el perímetro así como la presencia de propiedades matemáticas comunes (función, aditividad, congruencia, comparación y unidad), apuesta por una construcción conjunta de estos dos tipos de magnitudes. De manera similar Rogalski (1982, en Olmo et al, 1989) estudió la dimensionalidad de las longitudes, las superficies y los volúmenes en la consideración de invariancias de algunas transformaciones (una semejanza de razón r, para la longitud asocia el invariante r, para la superficie r^2, para el volumen r^3). Esta investigación concluyó que: 1) el modelo lineal funciona relativamente de forma precoz, pero existen grandes dificultades para superar este modelo y pasar a un tratamiento multidimensional apropiado a las medidas de superficie y de volumen; 2) una buena representación del carácter unidimensional de la longitud es necesaria para alcanzar un éxito mediano en la superficie, pero está lejos de ser suficiente; 3) la adquisición de la bidimensionalidad de la superficie como concepto es un proceso largo y complejo; 4) la acción espontánea de pavimentar parece un factor importante para lograr un paso del pavimentado al cálculo de la medida y 5) las dificultades persistentes parecen estar relacionadas con la existencia de obstáculos cognitivos y epistemológicos que se refuerzan mutuamente. Este es el caso del paso de las estructuras aditivas a las multiplicativas y su construcción como un dominio propio, el reconocimiento de la dimensionalidad relativa a los objetos geométricos así como la noción de equivalencia que fundamenta la medida de formas no pavimentables y subtiende propiedades de continuidad, complejas, pero ciertas.

Freudenthal (1983) por su parte, considera que el principal objetivo educativo en torno al área debe apuntar a la constitución del objeto mental área sin tener la necesidad de llegar al propio concepto matemático. De esta manera, considera su enseñanza centrada en la diferenciación y descripción de los distintos fenómenos que lo organizan, a saber, reparto justo (aprovechando las regularidades, estimando y midiendo), comparaciones y reproducciones en formas diferentes (por inclusión, por transformaciones de descomponer y recomponer, por estimación, por medición, por medio de transformación, es decir, congruencias, afinidades, cizallamientos) y mediciones (con agotamiento con una unidad, con subunidades más finas, por aproximación del interior y el exterior con rejillas fijas con figuras adaptadas, por conversión de transformaciones de rehacer y recomponer, a través de relaciones geométricas generales, por medio de fórmulas generales o de principios como el de Cavaliere).

Trabajos como los realizados por Douady y Perrín (1989) resaltan las bondades que suscita la enseñanza del área a partir de una diferenciación de los elementos matemáticos que la caracterizan: superficie, cantidad de área y medida. De esta manera proponen una enseñanza del área que privilegie la noción de área como una magnitud autónoma, desligando el área de la forma y diferenciando la cantidad de área, de la superficie y del número. Así mismo, se hizo especial énfasis en la medida de superficies (S) no pavimentables a través de una unidad determinada (A). Se privilegiaron en este caso acciones centradas en el recorte y pegado para fabricar una superficie S´ de igual área que S y pavimentable con A, a la vez que aproximaciones desde el interior y exterior de S, a partir de la unidad A o de subdivisiones de ella. También, se dio tratamiento especial a acciones donde es necesario señalar las diferencias y establecer las similitudes entre área y longitud (perímetro), focalizando la atención en sus variaciones respectivas a lo largo de diferentes transformaciones.

Chamorro (1997), por su parte, señala que la complejidad que subyace al aprendizaje de la medida del área, como de otras magnitudes, se relaciona con la existencia de un vocabulario flotante con el que se designan indistintamente acciones o conceptos muy diferentes en cuanto a su naturaleza matemática. Esta investigadora distingue distintos tipos de entornos a través de los cuales ha de pasar necesariamente el aprendizaje de la medida, siendo estos: objeto soporte, tipo de magnitud, valor particular o cantidad de magnitud, medida aplicación, medida imagen, medida concreta, la medición y el orden de magnitud. Desde esta perspectiva, se llama la atención al hecho de que cada uno de esos enfoques no conducen al mismo resultado, es más, se afirma la necesidad de discriminar la importancia de unos fenómenos en relación a otros. En cuanto al diseño de secuencias de enseñanza se considera como momentos de especial importancia la comparación entre áreas y la diferenciación entre perímetro y área. El primero, promueve la constitución del área como objeto mental y el segundo es necesario porque lo que provoca el error en tareas de comparación de áreas es, según esta investigación, el perímetro. En consecuencia, se sugiere considerar ejemplos de figuras que, a pesar del error en las dimensiones lineales, tengan la misma área y ejemplos de figuras que, a pesar del error en las dimensiones lineales, tengan diferentes áreas.

Otras investigaciones como Zacharos (2006) asumen que el uso de herramientas culturales o constructos sociales (principio de superposición y el método euclidiano de comparación de áreas) junto a la mediación social (Vygotski, 1978) son elementos que estructuran el concepto de área; mientras que otros estudios resaltan el papel de la visualización en el desarrollo de los argumentos en que se apoyan los estudiantes universitarios al justificar conjeturas sobre la noción de área, por ejemplo, el "cambio en la forma (al disminuir el número de lados de los polígonos) y de posición de las figuras al trasladar un punto, sin que cambie el área del polígono dado" (Cabañas y Mejía, 2009, p. 1284), son acciones visuales que determinan los argumentos de los estudiantes.

Así mismo se ha determinado que los problemas geométricos sobre conservación de área proveen herramientas propicias para comprender el carácter dinámico del concepto de área (Kospentaris et al, 2011), es el caso de la comparación entre triángulos y paralelogramos con igual base y altura, el establecimiento de relaciones entre triángulos con un par de ángulos iguales y la transformación de formas lineales a formas cuadradas equivalentes así como de figuras rectilíneas lineales y curvilíneas básicas. Por otra parte, estudios como los realizados por Pitta-Pantazi y Cristou (2009) han recalcado que el concepto de área es una red compleja de ideas entre las que se incluye, entre otras, la medición, estimación de áreas, unidad de área y equivalencia de unidades. Otros han explorado el rol que desempeñan distintos recursos didácticos como es el caso de materiales manipulativos (Fernández y Healy, 2010) y de software informático (Kordaki y Potari, 2002).

3. CONSERVACIÓN DEL ÁREA Y SU PAPEL EN EL TRATAMIENTO DEL CONCEPTO DE ÁREA

La conservación del área ha sido reconocido como un paso preliminar y obligado para la comprensión de la medida del área (Maher y Beattys, 1986) y se ha evidenciado que su desconocimiento suscita dificultades para comprender la obtención de las fórmulas del cálculo de la medida de área, lo que conlleva que éstas sean aplicadas de forma automática ignorándose en el proceso las relaciones entre la forma y las propiedades geométricas de las figuras en cuestión (Hutton, 1978, en Dickson, Brown y Gibson, 1991). Así mismo, se ha concluido que los conceptos de compensación y de relación parte-todo así como de las nociones de reversibilidad y transitividad son fundamentales para el desarrollo de la conservación de área (Piaget et al, 1981).

Además, se ha asumido que el corte, movimiento y pegado de superficies así como la re-organización de las partes de una figura para producir otra con superficie equivalente son acciones que promueven el desarrollo de la conservación del área (Kordaki, 2003). Por otro lado, investigaciones como las realizadas por Chamorro (1997) concluyen que las superficies prototípicas de los polígonos regulares estándares no promueven la identificación de una misma superficie por cambio de forma y que presentar las figuras dibujadas y no recortadas inhibe la aparición de procedimientos de comparación de superficies, elemento clave para el estudio de la conservación del área.

Pero sobre todo se ha insistido en la investigación en Educación Matemática en que los estudiantes evidencian sendas dificultades para aceptar que dos figuras puedan tener la misma área aunque sus formas sean distintas. Incluso, como lo señalan Popoca y Acuña (2011), cuando ante sus ojos una de las figuras es transformada en la otra. La forma y el área, pues, son cualidades indisociables y tributarias la una de la otra de tal manera que un cambio de forma, para los alumnos, conlleva a un cambio en el área de la figura (Chamorro, 1997). De esta manera, se ha reportado que algunos estudiantes aceptan la conservación en paralelogramos, pero muestran dificultades cuando las figuras son triangulares (Hughes y Rogers, 1979, en Kordaky, 2003) y que dificultades similares han sido observadas cuando las formas son irregulares (Maher y Beattys, 1986).

Igualmente se ha señalado que las dificultades de los estudiantes sobre la conservación de área permanecen de un grado de educación a otro, incluso a nivel universitario (Maher y Beattys, 1986). Por otra parte, también se ha resaltado que los estudiantes tienen problemas para comprender el área como la suma de sus partes (Brown, Carpenter, Kouba, Lindquist, Plata y Swafford, 1988), elemento clave para reflexionar sobre la conservación de área.

Las estrategias de los estudiantes en la realización de tareas de conservación de área también se ha reportado en la literatura especializada. Se ha señalado, entre diversos aspectos, elementos que caracterizan patrones de comportamiento en las estrategias de los estudiantes al verificar si dos formas distintas tienen la misma área mediante la aplicación del concepto de congruencia pieza por pieza (reconfiguración de una de las figuras sobre la superficie de la otra). Es el caso de la superposición de una región sobre otra y la discriminación de congruencias lineales y angulares para identificar el tipo de disección a aplicar en una de las figuras (Rahim y Olson, 1999). Por otra parte, Mamona-Downs y Papadopoulos (2006) afirman que los estudiantes recurren a acciones visuales y de medida para justificar sus procedimientos, pero que no se suele considerar la aplicación de propiedades geométricas; y Pitta-Pantazi y Cristou (2009) consideran que a) el uso de ambientes de geometría dinámica y b) el estudio de tareas de medida de área de triángulos y paralelogramos donde la conservación del área está presente y donde se enfatiza la relación forma-área, son factores que afectan positivamente el rendimiento de los estudiantes.

Así mismo, se ha señalado que los estudiantes, al establecer diferencias y similitudes entre un paralelogramo y un rectángulo de igual área, promueven procedimientos prototípicos flexibles (el movimiento en las figuras es factible) que conllevan a asumir las figuras holísticamente y manipularlas mentalmente, o bien, a través de procedimientos prototipos no flexibles (la figuras son representaciones estáticas) que inducen la focalización en partes individuales de la figura (Walcott, Mohr y Kastberg, 2009). Más recientemente, Kospentaris et al (2011) afirman que el conocimiento geométrico formal, la percepción visual y las nociones intuitivas personales son factores que determinan las estrategias de los estudiantes en el estudio de la equivalencia de áreas. Por ejemplo, en esta investigación se detectó que la visualización interfiere de forma problemática con el razonamiento formal y que las nociones personales injustificadas se combinan con la escasez de conocimiento geométrico. Igualmente se determinó que la principal noción intuitiva considerada por los estudiantes fue que la equivalencia de áreas coincide con la congruencia.

Algunos estudios han reseñado que la conservación de área ha sido investigada independientemente de la medida del área mientras que la articulación de estos dos conceptos es indispensable para comprender el concepto de área, es el caso del trabajo realizado por Kordaky (2003) quien adicionalmente recalca que la investigación educativa no suele considerar el estudio de la conservación del área vinculado a figuras equivalentes de igual forma (clases de triángulos o paralelogramos equivalentes con bases comunes e iguales) y a polígonos no-convexos. Y, que por el contrario, la atención de la literatura especializada ha estado centrada en las figuras con formas estándar como cuadrados, rectángulos, triángulos y paralelogramos (Johnson, 1986). Finalmente, es importante señalar que a pesar de que muchas investigaciones han considerado que la conservación del área debe aparecer de forma explícita en los currículos escolares, el desarrollo de la conservación de área tiende a ser ignorado en la enseñanza tradicional (Clements y Stephan, 2004, en Kospentaris et al, 2011).

4. MEDIDA DE CANTIDADES DE ÁREA

Esta tendencia de investigación, en relación a las demás, se impone como la de mayor difusión en el campo de la Educación Matemática. En este sentido, muchos estudios evidencian que el concepto de medición de áreas es complicado de comprender (Piaget et al, 1981; Maher y Beattys, 1986; Kamii y Kysh, 2006, entre otros) e involucra una red de conceptos que se relacionan de forma concomitante. Es el caso de la conservación del área, la unidad y su iteración, el recuento de unidades y el uso de fórmulas (Piaget et al, 1981; Maher y Beattys, 1986). Así mismo, se ha enfatizado el importante papel que para la comprensión de la medida desempeñan la variedad de sistemas de representación utilizados, el contexto en que se expresan y la disponibilidad de herramientas (Kordaki y Potari, 2002).

Otros estudios señalan que las dificultades de los estudiantes en relación con la medida de área se atribuyen tanto a la forma fragmentada en que se estudia el área sin relacionarla dinámicamente con su perímetro (Moreira Baltar, 1997), como a la imposibilidad de llenar el vacío existente entre el uso de fórmulas y la manipulación cualitativa del área sin uso de números (Baturo y Nason, 1996). Por otra parte, algunos reportes de investigación señalan que la comparación (De Araújo y Dos Santos, 2009) y conservación de áreas (Douady y Perrín, 1989) son aspectos fundamentales y preliminares para la comprensión de la medición de áreas. Diferentes estudios también consideran que las acciones de corte, movimiento y pegado de superficies al transformar una figura en otra de igual área son fundamentales para la comprensión de la medida (Hirstein, Lamb y Osborn, 1978; Olmo et al, 1989).

Investigaciones como las realizados por Chamorro (1997) han reportado que muchas propuestas de enseñanza focalizan toda su atención en el desarrollo de tratamientos aritméticos y se ha llamado de atención a sus efectos en la comprensión de la medida de áreas,

> "Bajo el título de actividades de medición, se esconde un amplio abanico de cuestiones que poco o nada tienen que ver con ella […] los libros de texto, ejercicios y evaluaciones, evidencia que la medida es una excusa para trabajar actividades de domino aritmético, relativas a la numeración y al uso de los números naturales y decimales, produciéndose el remplazo de las magnitudes por los números, de la medición por el conteo, perdiéndose toda la estructura topológica subyacente […] en el ámbito de la medida hay que asegurarse previamente de la igualdad de los objetos en relación con las transformaciones operadas, y puesto que estos aspectos se obvian a través del tratamiento aritmetizado, su comprensión y pertinencia, pasan a ser responsabilidad del alumno" (p. 231).

En la misma línea de ideas Kordaki y Potari (2002) afirman que en la escuela los estudiantes expresan sus conocimiento matemáticos exclusivamente mediante sistemas simbólicos como son las fórmulas para el cálculo de áreas, mientras que otros sistemas de representación que enfatizan el conocimiento intuitivo y la medición de áreas a través del cubrimiento con unidades espaciales no se suelen tener en cuenta. En consecuencia, los estudiantes no tienen oportunidades para dotar sentido al concepto de acuerdo a su desarrollo cognitivo, ni a expresar el conocimiento que poseen. Así mismo, trabajos como los realizados por Johnson (1986) y Douady y Perrín (1989) reseñan que las dificultades que se han observado en torno al concepto de medida, están relacionadas con la introducción prematura de un acercamiento cuantitativo a la medida del área mediante el uso de fórmulas, sin tener en cuenta el enfoque cualitativo que subraya el concepto de conservación de área sin el uso de números.

De forma más puntual, algunas investigaciones han precisado los elementos que deben ser considerados en la construcción del concepto de unidad de medida. Es el caso de Kordaky y Potari (2002) que describen cuatro aspectos a tener en cuenta: comprensión de las características espaciales de la unidad, su invariabilidad durante el proceso de medición, su conservación a través de acciones de separación y recombinación y la relación inversa entre el tamaño y el número de unidades necesarias para cubrir una superficie. También hay estudios que evidencian que la cuadrícula no es utilizada espontáneamente en los procesos de medida. Por ejemplo, en Chamorro (1997) se señala que esta herramienta no se tiene en cuenta para pavimentar la superficie de una figura a partir de una unidad asignada, ni para establecer relaciones entre la forma de la superficie a medir y la de la unidad a usar; tampoco para considerar que una misma unidad puede representarse con figuras de forma diferente mediante la aplicación de descomposiciones y recomposiciones sobre ella. En esta investigación, se afirma, además, que comprender cómo puede funcionar la cuadrícula en tareas que promueven aspectos como los anteriormente citados requiere de un trabajo previo.

La investigación educativa ha evidenciado igualmente que la relación inversa entre el tamaño y el número de unidades necesarias para cubrir una superficie presenta dificultad en la comprensión de la medida de áreas (Carpenter y Lewis, 1976). Y, en un sentido diferente, estudios como los realizados por Hirstein et al (1978) llaman la atención que las unidades cuadradas suelen ser consideradas de forma rígida y discreta, aspecto que explica por qué en procesos de medida las unidades cuadradas no son transformadas en otras de forma distinta pero con igual área.

Igualmente, un gran número de reportes resaltan la complejidad que subyace al reconocimiento de lo que es una unidad de medida y de la comprensión del área como pavimentación de una superficie. Brookes (1970, en Dickson et al, 1991) y Owens y Outhred (1997), entre otros, reportan las dificultades que tienen los estudiantes al calcular el área mediante la replicación de una unidad, por ejemplo, cuando en el proceso de pavimentación se dejan sin recubrir fracciones de la superficie a medir o cuando las figuras que representan a la unidad se superponen entre sí. Otras investigaciones llaman la atención que algunos estudiantes ignoran las fracciones de las unidades o las cuentan como si fueran unidades enteras (Zacharos, 2006; Marmolejo y Vega, 2012); mientras que otros estudios reportan dificultades al equilibrar cuartos de unidad para recomponer una unidad de forma cuadrada (Dickson et al, 1991).

La forma de la unidad o de la figura a medir genera complejidad en el proceso de medición. En este sentido, se identifican problemas en el uso de unidades de forma no cuadrada (Kamii y Kysh, 2006) y se llama la atención sobre la complejidad de utilizar fracciones de unidad de forma triangular para conformar unidades cuadradas (Dickson et al, 1991). Los estudiantes recurren a unidades cuadradas para calcular el área de figuras rectangulares o compuestas por formas rectangulares, pero no generalizan este procedimiento en figuras con formas irregulares (Maher y Beattys, 1986) y, a pesar de esto, la enseñanza de la medida privilegia figuras geométricas típicas como cuadrados, rectángulos, paralelogramos y triángulos (Kordaky y Potari, 2002).

Así mismo, se ha demostrado que se suelen usar las unidades cuadradas para medir rectángulos y otras figuras con ángulos rectos, pero en figuras diferentes se recurre a otro tipo de unidades (Maher y Beattys, 1986). Por otra parte, se afirma que la forma de la figura medida afecta la selección de la forma de la unidad de medida (Zacharos, 2006) y se resalta la importancia del uso de unidades superficiales para la comprensión del concepto de medición de áreas (Rahim y Sawada, 1990).

Aplicar fórmulas de área (De Araújo y Dos Santos, 2009), extender la fórmula de área de una figura a otra (Dickson et al, 1991) y calcular el área de regiones irregulares (Carpenter y Lewis, 1976, en Dickson et al, 1991) son actividades complejas para los estudiantes. El uso de fórmulas de áreas tiene más que ver con la memorización y el aprendizaje de reglas mnemotécnicas que con la comprensión de la fórmula (Pitta-Pantazi y Cristou, 2009) y en el caso de los textos escolares, el razonamiento asociado a la construcción de fórmulas de figuras elementales sólo se contempla en un muy reducido número de tareas (De Carvalho, 2013). Olmo et al (1989, p. 46) sugieren que presentar “la fórmula como un último paso, como un camino más corto para lograr el resultado que se ha obtenido antes por medios más espontáneos y laboriosos” es una decisión didáctica que potencia el uso comprensivo de las fórmulas en el tratamiento del área.

El estudio de la medición centrado de forma generalizada y prematura en el algoritmo A = base × altura es una de las principales razones que explican por qué los estudiantes no comprenden el proceso de medición (Outhred y Mitchelmore, 1996). Este tipo de prácticas promueven el estudio de la medida sin considerar las propiedades físicas que caracterizan el tipo de magnitud en estudio (la superficie para el caso del área) y, por el contrario, relacionan el área con elementos unidimensionales de la figura (Outhred y Mitchelmore, 1996).

En algunas investigaciones se ha afirmado que debe considerarse previamente a la introducción del algoritmo arriba señalado la reiteración y conteo de unidades cuadradas para cubrir una superficie (Martin y Strutchens, 2000, en Kamii y Kysh, 2006); mientras que otros estudios han mostrado que la transición de la medida mediante la replicación y conteo de unidades a un acercamiento a las fórmulas usando la multiplicación es un proceso complejo y no transparente para los estudiantes, es el caso de Nunes et al, 1993 (en Kordaki, 2003) quien además resalta que algunos estudiantes tienen éxito en la replicación de una unidad de medida, pero al mismo tiempo evidencian dificultades en el uso de las fórmulas de áreas. Además los estudiantes no interpretan el significado físico del valor obtenido al aplicar una fórmula de área (Zacharos, 2006), es decir, que dicho valor representa el número de unidades cuadradas necesarias para cubrir la superficie de la figura medida. Así mismo, De Carvalho (2013) muestra que los libros, al tratar la fórmula A = b x h, privilegian en gran medida tareas que promueven exclusivamente la sustitución de valores en ella y que, por el contrario, no se consideran las técnicas que privilegian comprender su significado, por ejemplo, contar la cantidad de cuadros enfilados en una columna (o en una línea), contar la cantidad de columnas (o líneas), multiplicar el número de cuadrados en la columna (o línea) por la cantidad de columnas (o líneas).

En un sentido distinto se sostiene que la aplicación de procesos de reiteración y conteo de unidades no promueven la comprensión del algoritmo A = Base x Altura (Kamii y Kysh, 2006), es decir, que no permiten entender cómo dos magnitudes lineales (la longitud y el ancho) pueden dar lugar a un área cuándo se multiplican. Al respecto, se afirma que la aplicación de dichos procesos ignora el carácter continuo del área y, por el contrario, promueven su comprensión de forma discreta. Estudios como los realizados por Piaget et al (1981) manifiestan que es a través del concepto de área como una matriz conformada por un conjunto infinito de líneas paralelas e infinitesimalmente cercanas unas de otras, como se asigna sentido al algoritmo anteriormente reseñado. Desde estas perspectivas se considera que solo cuando los estudiantes asumen el área como una matriz de líneas es factible la posibilidad de utilizar un cuadrado como unidad de área.

5. EL ÁREA Y SU ARTICULACIÓN CON OTROS CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Son numerosas las dificultades que tienen los estudiantes para diferenciar el área del perímetro (Dickson et al, 1991; Estrada y Avila, 2009) así como los profesores (D’Amore y Fandiño, 2007). También existe una gran desconocimiento de las relaciones entre estos dos tipos de magnitudes (Montis, Mallocci y Polo, 2003). La literatura especializada ha evidenciado nociones intuitivas de los estudiantes que obstaculizan la comprensión de tales relaciones, es el caso de *a más perímetro, más área* (Kospentaris et al, 2011; Popoca y Acuña, 2011) o la noción recíproca *a más área, más perímetro* (Babai et al, 2010, en Kospentari, et al, 2011) o *a igual área igual* *perímetro* (Olmo et al, 1989). Fandiño y D´Amore (2009), por su parte, también señalan la existencia de ideas intuitivas sobre la relación área-perímetro y reconoce que buscar ejemplos donde dicha relación esté presente de diferentes formas ayuda a que se produzca las modificaciones de las concepciones en estudiantes y profesores. Además, se llama la atención en este estudio que, para los educadores, la búsqueda de ejemplos donde la relación *a menor perímetro mayor área* (y viceversa) generó especial complejidad; y que para los estudiantes de los niveles de escolaridad más alto (bachillerato y universidad) las relaciones *a mayor perímetro, menor área* (y viceversa) y *a menor perímetro, igual área* (y viceversa) no son aceptadas espontáneamente.

También se ha evidenciado que en la enseñanza secundaria el estudio de las relaciones entre el área y el perímetro es uno de los temas más difíciles (Dickson et al, 1991) y que los libros de texto promueven pocas oportunidades para considerar estos dos tipos de magnitud de forma articulada (De Carvalho, 2013). Por su parte, Chamorro (1997) considera que en la enseñanza de las matemáticas se privilegia la presentación de figuras dibujadas como parte integrante de la hoja de papel, y que es poco habitual encontrarlas recortadas. En palabras de Chamorro este hecho no favorece la delimitación entre longitud y superficie y constituye un claro obstáculo didáctico, puesto que lo que destaca ante los ojos de los estudiantes es la línea que constituye la frontera, sin que se reconozca la superficie como el interior delimitado por dicha frontera.

Otros estudios identifican obstáculos de naturaleza epistemológica como los principales responsables de la confusión entre el área y el perímetro. Por ejemplo, las dificultades en los cambios de dimensión y el estatus especifico de las unidades de medida y las relaciones que las unidades de superficie tienen con las unidades de longitud (Rogalski, 1979). D’Amore y Fandiño (2007), por su parte, consideran que la confusión área-perímetro no es solo de naturaleza epistemológica, sino básicamente de naturaleza didáctica, en palabras de estos autores dicha confusión responde a elecciones didácticas tales como 1) el uso exclusivo de figuras convexas y formas estándar, 2) que la relación entre el área y el perímetro nunca se muestra de forma explícita sobre una misma figura, 3) la diferenciación entre estas magnitudes recae exclusivamente en afirmaciones tales como “el perímetro se mide en metros y el área en metros cuadrados” y nunca en sus relaciones reciprocas y 4) la poca existencia de tareas que promuevan transformaciones sobre las figuras que conserven o modifiquen el área o el perímetro.

Otras investigaciones resaltan que el estudio de las relaciones entre el área y el perímetro debe considerar un vocabulario más significativo (*la valla que rodea un jardín* para referirse al perímetro o el *jardín* para referirse al área) previo a la introducción de una terminología matemática (Dickson et al, 1991), o bien han caracterizado las dificultades de la comprensión del concepto de longitud y área desde un punto de vista lingüístico (Vee, 1999, en Zacharos, 2006). Además, estudios como el realizado por García, Patagones y Carrillo (2006) han señalado que aquellas tareas que permiten analizar la variabilidad del perímetro de figuras equivalentes sin recurrir a unidades de medida convencionales promueven la distinción entre estas dos magnitudes. Por otra parte, Rickard, College y Michigan (1996) evidencian que el uso que hacen los profesores de la resolución de problemas para establecer diferencias entre el área y el perímetro, si bien suscita excelentes oportunidades para hacer conexiones matemáticas, también puede introducir situaciones que generan confusión e incertidumbre en los estudiantes. Así mismo la identificación precoz del área y del perímetro con su medida favorece estas confusiones (Dickson et al, 1991). Por ejemplo, es posible que los alumnos no dispongan de suficientes oportunidades para la exploración práctica de los fundamentos espaciales de estos dos conceptos y de las relaciones que los ligan. En esta misma línea de ideas se encuentra el trabajo de Douady y Perrín (1989).

El tratamiento del área articulado con otros conceptos matemáticos distintos al perímetro también ha sido un objeto de estudio en el campo de la educación matemática. Tirosh y Stavy (1996), por ejemplo, identifican dificultades en la resolución de actividades donde el área y el volumen son tratados paralelamente, en particular, cuando consideran tareas de comparación de dos cilindros con áreas laterales iguales y volúmenes distintos. Esta investigación pone en evidencia que la mayoría de los estudiantes extienden la igualdad de las áreas laterales al del volumen de estos sólidos, es decir, que una vez reconocido que las áreas laterales de los dos sólidos son iguales, los estudiantes concluyen de forma inmediata y espontánea que la igualdad se mantiene entre los volúmenes.

Turegano (1998) y Cabañas y Cantoral (2012), por su parte, analizan el papel que desempeña el área en la construcción del concepto de integral. El cálculo de áreas de superficies planas es determinante para la comprensión del concepto de integración, pues, por un lado, determina las dificultades y concepciones de los estudiantes al tratar dicho concepto y, por otro lado, se impone como el principal elemento que organiza el estudio de la integral. En relación al segundo aspecto Turegano (1998) afirma que “la introducción de la integral definida mediante su definición geométrica permite establecer una relación integral-medida que favorece la transferencia a otros conceptos” (p. 245)

Otros estudios como los realizados por Yim (2010) consideran cómo los estudiantes abordan tareas de división de fracciones en contexto de áreas de figuras rectangulares y la manera como formulan algoritmos numéricos utilizando diversas estrategias. Fueron tres las estrategias identificadas en la investigación: 1) acciones de reducción y expansión a la base del rectángulo hasta que su longitud sea la unidad, 2) transformación de la base o la altura del rectángulo hasta que su área sea la unidad, y 3) asignación tanto a la base como al área del rectángulo de valores particulares.

También se ha considerado en contextos de áreas de rectángulos tanto el estudio de las proporciones (Son, 2013) como el de fracciones equivalentes (Kamii y Clark, 1995).

6. CONCLUSIONES

Caracterizar los enfoques en que un concepto matemático es objeto de investigación es una cuestión primordial pues permite considerar, confrontar, adaptar o evitar cuestiones que han sido tratadas; o incluso, retomar aquellas que ya fueron consideradas y abordarlas desde nuevas perspectivas teóricas o metodológicas. En consecuencia, estados del arte como el aquí presentado constituyen la entrada infranqueable a nuevos caminos que permiten abordar desde los más variados puntos de vista los fenómenos que subyacen a la investigación de los conceptos matemáticos. En este sentido, la caracterización de un estado del arte sobre el área arroja una serie de reflexiones cuya interpretación desvela algunas conclusiones que merecen ser destacadas:

- A pesar de la gran variedad de investigaciones que se han realizado en torno al área y de los múltiples resultados presentados en la literatura especializada, la complejidad que subyace en su estudio permanece latente. Han de considerarse, pues, nuevas tendencias que desde enfoques diferentes a los ya tradicionales permitan explicar y caracterizar los fenómenos que subyacen al estudio de este concepto; a la vez, que promuevan el diseño, implementación y evaluación de nuevas apuestas de enseñanza.
- Se ha puesto de manifiesto una alta diversidad de aproximaciones que desde enfoques distintos han contemplado el concepto de área. Pero, utilizando palabras de Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006) si bien, en ciertos momentos la diversidad puede ser inevitable, incluso enriquecedora, el progreso de una disciplina así como las posibilidades de aplicación práctica que genera, exige aunar esfuerzos para identificar el núcleo común de los problemas considerados, lo que conlleva a cristalizar verdaderas líneas de investigación. Por tanto, es necesario la búsqueda de un núcleo común que aborde en todo su conjunto las más diversas apuestas y conclusiones, así como la variedad de intereses y propuestas, que señalados en los apartados anteriores, caracterizan los fenómenos asociados al estudio del área.
- Independientemente de la tendencia considerada, la mayoría de los reportes de investigación anteriormente señalados resaltan la presencia de un problema cognitivo que complejiza el estudio del área, que permea las apuestas de enseñanza consideradas, que afecta los resultados en pruebas externas y cuya caracterización debe ser contemplada. Nos referimos al problema de "ver" y su rol (y caracterización) en torno al concepto de área, es decir, a las posibilidades que para la comprensión de este concepto representa discriminar, considerar, utilizar y articular tanto las operaciones[1] y cambios figurales[2], dimensionales[3] y de focalización bidimensional[4], como los flujos visuales[5] que intervienen en su tratamiento (Marmolejo y González, 2013b). Pero, en las investigaciones referenciadas en el estado del arte aquí expuesto la sinergia "ver en matemáticas"/área o ha sido considerado de manera implícita o de forma tangencial, cuestión que lleva a la no caracterización de cómo a través de otros tópicos es tratada el área en la escuela y si dicha articulación es, o puede ser, abordada.

En este orden de ideas, Marmolejo y Vega (2012) establecen, por un lado, que la movilización de algunos de los elementos constitutivos de la visualización (operaciones y focalización bidimensonal) promueven procedimientos económicos y potentes acordes con el concepto de área mientras que no considerarlos, induce a procedimientos erróneos o engorrosos y pocos pertinentes que conducen a la aplicación de tratamientos aritméticos tipo conteo (uno a uno), con lo que el área se estudia desde un punto de vista aritmético dejándose a un lado su verdadera naturaleza (Dickson et al, 1991; MEN, 1998, entre otros). Por otro lado, estos investigadores resaltan que el tratamiento del área puede ser un concepto que ayude al desarrollo de la visualización en matemáticas.

Dada la importancia de la visualización en el estudio de las geometría (Duval, 1998), Marmolejo y Vega (2012) afirman que la sinergia visualización-tratamiento del área constituye "una entrada a la geometría" (p. 29), la cual ha de ser explorada. Es necesario, pues, el desarrollo de un nuevo campo de investigación que permita caracterizar, por un lado, cómo la visualización interviene en la constitución del concepto área y por el otro, cómo su desarrollo puede ser concebido a través del área. En este sentido, Marmolejo y Gonzáles (2013a, 2013b, 2014) han

[1] Determinan la naturaleza de los cambios figurales introducidos e inducen la comprensión de propiedades y conceptos de área.
[2] Caracteriza la aprehensión operatoria, es decir, la forma como las figuras pueden ser transformadas.
[3] Promueve la deconstrucción dimensional de las formas.
[4] Suscita cambios en la visualización centrados en unidades visuales de naturaleza bidimensional.
[5] Establece el orden y sentido del tipo de visualización aplicado.

descrito tres facetas cuya interacción permite caracterizar la sinergia visualización/área, es decir, los elementos constitutivos de la visualización[6], las funciones visuales[7], y los elementos[8] y clases de control[9] visuales asociados al tratamiento del área. Si bien, tales elementos han sido definidos y caracterizados a partir de la forma como los libros de texto presentan el concepto de área, su consideración es posible para determinar y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje del área así como las complejidades abordadas, pues, los libros de texto influyen en la forma como el contenido matemático es enseñado en la escuela e incluso en ocasiones lo determinan.

Lo anterior pone en evidencia la génesis de un nuevo enfoque a través del cual es posible articular en un todo las causas de la complejidad que subyacen al estudio del área. Así, pues, desde este punto de vista, cuestiones como las que reseñaremos a continuación deben ser contempladas para comprender en detalle cómo la sinergia visualización/tratamiento del área interviene en la comprensión de los fenómenos que subyacen al estudio de dicho concepto matemático en la escuela:

- ¿Los profesores y los soportes didácticos que se consideran en el aula, entre ellos los libros de texto, promueven el desarrollo de la visualización al tratar el concepto de área? De ser así, ¿en qué tópicos de área y ciclos educativos lo consideran en mayor o menor medida? ¿Cuáles son los elementos de la visualización que tienden a ser más o menos considerados, y en qué ciclos de enseñanza o tópicos relativos al área suelen considerarse?
- ¿La forma como la visualización es asumida en el tratamiento del área en la escuela favorece o, por el contrario, obstaculiza la adquisición de este concepto matemático? ¿Qué soportes didácticos constituyen los mejores recursos para favorecer la construcción del área a través de la visualización?
- ¿Cuál es el rol que desempeñan las distintas funciones de la visualización para el desarrollo del área? ¿Cómo intervienen en la constitución del área? ¿Es posible determinar los diferentes estatus que desempeñan las figuras en el estudio del área; en consecuencia, los tipos de ambivalencia que pueden introducir?
- ¿Cuál es el rol de los elementos y clases de control visual en el estudio del área? ¿Cuáles son los elementos constitutivos de la visualización en los que la enseñanza del área ejerce un mayor o menor grado control visual? ¿Cuáles son los elementos y clases de control visual que se consideran? ¿Cómo se organizan en los tópicos y ciclos de enseñanza donde el concepto de área se contempla? ¿Su presencia facilita o entorpece la comprensión del concepto de área y el desarrollo visual? ¿Cómo los educadores acompañan a sus estudiantes para afrontar las tareas que incluyen una u otra clase de control, y cómo los estudiantes reaccionan ante su presencia? ¿De qué forma los profesores o la mediación de soportes didácticos favorecen o entorpecen la construcción autorregulada del concepto de área?
- ¿Qué tipos de visualización, niveles de complejidad visual, funciones visuales, elementos y clases de control visual relativos a otros conceptos relacionados con el área de superficies planas desempeñan un papel determinante?

Solo a través de la respuesta a cuestiones como las anteriormente referenciadas es posible reflexionar acerca de nuevas estrategias de instrucción que permitan a estudiantes y educadores disminuir la complejidad que representa el estudio del área. En otras palabras, que promuevan una fructífera construcción del concepto de área, a la vez que el desarrollo de habilidades visuales potentes y pertinentes a las exigencias que las matemáticas requiere.

REFERENCIAS

Baturo, A y Nason, R. (1996). Students teacher´s subject matter knowledge Within the domain of área measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31(3), 235-268.

Brown, C.A., Carpenter, T.P., Kouba, V.L., Lindquist, M.M., Silver, E.A. y Swafford, J.O. (1988). Secondary school results for the fourth NAEP mathematics assesment: discrete mathematics, data organization and interpretation, measurement, number and operations. *Mathematics Teacher,* 81(4), 241-48.

Cabañas, G. y Mejía, O. (2009). ¿Cómo se perciben las nociones de comparación, conservación y Cuantificación del área por estudiantes universitarios? Un estudio a Través de los argumentos. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 22, pp. 1277-1285). México: Colegio Méxicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamaricano de Matemática Educativa A.C.

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2012). El papel de la noción de conservación de área en la resignificación de la integral definida. En R. Flores. (Ed.). *Acta latinoamericana de matemática educativa* (Vol 25, pp.1031-1040). México: Colegio Méxicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamaricano de Matemática Educativa A.C.

Carpenter, T.P. y Lewis, R. (1976). The development of the concept of a standard unit of measure in young

[6] Operaciones, cambios figurales, dimensionales y de focalización bidimensional, y flujos visuales

[7] Formas en que la visualización tiende a soportar o guiar el desarrollo de un problema planteado o permitir la comprensión del despliegue de un procedimiento guiado (Marmolejo y González, 2013a)

[8] Factores, elementos y estrategias que guían o entorpecen las maneras de ver a considerar en el desarrollo de una actividad matemática (Marmolejo y González, 2014)

[9] Formas en que se promueve el control visual en el estudio de las matemáticas (Marmolejo y González, 2014).

Recepción:28/10/2014 *Aceptación: 05/03/2015*

students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 7(1), 53-58.

Chamorro, M.C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid. España: Pearson Educación.

Chamorro, M.C. (1997). *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental*. Tesis Doctoral microfilmada. UNED. Madrid.

D'Amore, B. y Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *RELIME*, 10(1), 39-68.

De Araújo, A.J. y Dos Santos, M.C. (2009). Avaliação Externa do Projovem: o caso de áreas e volumes. *Boletim de Educação Matemática*, 22(33), 23-49.

De Carvalho, D.G. (2013, junio). Analise praxeologica da área de figuras geométricas planas no guía de estudo do Projevem Urbano. En Sociedade Brasileira de Eeducação Matemática (Organizador), XI Encontro Nacional de educação Matemática Curitiba. Brasil.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Traducción realizada por Luis Bou (Children leraning mathematics: A Teacher´s Guide to Recent Research). Barcelona. España: Editorial Labor, S.A. (Primera edición).

Douady, R. y Perrín, M.J. (1989). Un process d´apprentissage du concept d´aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), 387-42.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. (pp. 37-51). Dordrecht. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Estrada, J.L. y Ávila, A. (2009). Los usuarios de la educación básica para jóvenes y adultos y la solución de un problema de área. *Educación matemática*, 21(3), 33-66.

Fandiño, M.I. y D´amore, B. (2009). *Área y perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos.* Editorial Magisterio. Bogotá. Colombia.

Fernández, S.H.A.A. y Healy, L. (2010). Inclusion of blind student in mathematics clasroom: tatil exploration of área, perimeter and volumen. *BOLEMA*, 23(37), 1111-1135.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht. Netherlands: Reidel.

García. G, Patagones. P. y Carrillo .J. (2006). Relación entre perímetro y área: el caso de Patricia y las interacciones. En M. Bolea, M. Moreno y M. González (Eds.). *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 185-194). Huesca. España: SEIEM.

Godino, J., Font, V., Contrera, A. y Wilhelmi, M. (2006). Una visión didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 9(1), 117-150.

Hirstein, J., Lamb, C.E. y Osborn, A. (1978). Student misconceptions about area measure. *Arithmetic Teacher,* 25(6), 10-16.

Johnson, H.C. (1986). Area is a measure. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology,* 17(4), 419–424.

Jones, K. y Fujita, T. (2013). Interpretations of national curricula: the case of geometry in textbooks from England and Japan, *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 45(5), 671-683.

Kamii, C. y Clark, F.B. (1995). Equivalent Fractions: their difficulty and educational implications. *Journal of mathematics behavior,* 14(4), 365-378.

Kamii, C. y Kysh, J. (2006). The difficulty of "length × width": Is a square the unit of measurement ? *Journal of Mathematical Behavior,* 25(2), 105-115.

Kordaki, M (2003). The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics* 52(2), 177–209.

Kordaki, M. y Potari, D. (2002). The effect of area measurement tools on student strategies: the role of a computer microworld, *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 7(1), 1–36.

Kospentaris, G., Spirou, P. y Lappas, D. (2011). Exploring students´strategies in área conservation geometrical task. *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 105-127.

Maher, C.A. y Beattys, C.B. (1986). Examining the construction of area and its measurement by ten to fourteen year old students. En E. Lansing, G. Lappan and R. Even (Eds.), *Proceedings of the 8 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 8* (pp. 163–168**).** East Lansing. Michigan State.

Mamona-Downs, J. y Papadopoulos, I. (2006). The problema-solving element work relate to the concept of área. En J. Novotná, H. Moraova, M. Krátká y N. Stehl líková (Eds.), *Proceedings of the 30 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 30* (Vol 4, pp. 121-128). Praga. Republica Checa: Charles University in Prague.

Marmolejo, G.A. (2014). *Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles*. Tesis doctoral no publicada, Salamanca, España.

Marmolejo, G.A. y González, M.T. (2014). Control Visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. En prensa.

Marmolejo, G.A. y González, M.T. (2013a). Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto. *Revista Integración*, 31(1), pp. 87-106.

Marmolejo, G.A. y González, M.T. (2013b). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Revista Educación Matemática*, 25(3), 61-102.

Marmolejo, G.A. (2013c). Situaciones problemáticas para la enseñanza del área de regiones poligonales en los primeros ciclos de la educación básica. Introducción a la magnitud área y su medida. En, G.A. Marmolejo, H. Blanco y E. Fernández (Eds.). *Fortalecimiento de las matemáticas en la educación básica en Tumaco, Policarpa y Samaniego* (pp. 26-66). San Juan de Pasto. Colombia. Edición electrónica.

Marmolejo, G. y Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, 24(3), 9-34.

MEN (1998). *Análisis y Resultados de las pruebas de Matemáticas - T.I.M.S.S./96*. Bogotá. Colombia: Creamos Alternativas.

Montis, A.M., Mallocci, P. y Polo, M. (2003). Congettura e argomentazione nella construzione dei concetti di equiestensione e isoperimetria: un percorso didattico dalla prima alla quinta elementare. *L'educazione matemática*, 5(1), 1-12.

Moreira Baltar, P. (1997). Learning process for the concept of area planar regions in 12–13 year-olds. En Erkki Pehconen (ed.), *Proceedings of the 21st International Conference, Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 264–27). Lathi, Finland.

Olmo, M.A. Moreno, M.F. y Gil, F. (1989). *Superficies y volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas? Matemáticas: cultura y aprendizaje.* Madrid. España: Editorial Síntesis

Outhred, L. y Mitchelmore, M. (1996). Children's intuitive understanding of area measurement. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 20,* (Vol 4, pp. 91-98). Valencia. España. Universidad de Valencia.

Owens, K. y Outhred L. (1997). Early representations of tiling areas. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 21* (Vol 3, pp. 312-319). Lahti. Finlandia: Helsinki University.

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1981). *The Child's Conception of Geometry*, New York. Estados Unidos: Norton and Company.

Pitta, D., Pantazi, y Christou, C. (2009). Cognitive styles, dynamic geometry and measurement performance. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), 5-26.

Popoca, M. y Acuña, C. (2011). Cambios en figuras de área igual, conservación y relaciones figúrales. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 24, pp. 541-550). México, DF: Colegio Méxicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamaricano de Matemática Educativa A.C.

Rahim, M.H. y Olson, A. (1999). Qualitative patterns in plane geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(3), 373-389.

Rahim, M.H. y Sawada, D. (1990). The duality of qualitative and quantitative knowing in school geometry. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 21(2), 303-308.

Rickard, A, College, A. y Michigan, A. (1996). Connections a confusion: Teaching perimeter and área with a problema-solving oriented unit. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(3), 303-327.

Rogalski, J. (1979). Quantités physiques et structures numériques Mesures et quantification: les cardinaux finis, les longeurs, surfaces et volumes. *Bulletin de l´APMEP*, 320, 563-586.

Roldán, G.J. y Rendón, H. (2014). *Estrategia para el estudio del área y del perímetro de figuras planas articulada al modelo socio crítico para los estudiantes de la institución educativa María de los Ángeles Cano Marques*. Tesis de maestría no publicada. Medellín, Colombia

Son, J.W. (2013). How preservice teachers interpret a respond to student errors. Ratio and proportion in similar rectangles. *Educational studies in mathematics*, 84(1), 49-70.

Tirosh, D. y Stavy, R. (1996). Intuitive rules: a way to explain and predict student´s reasoning. *Educational studies in mathematics*, 38 (1-3), 51-66.

Turegano, P. (1998).Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las* ciencias, 16(2), 233-249.

Vygotsky, L.S. (1978). Mind in society. The development of higher psychological processes. Cambridge MA: Harvard University Press.

Wagman, H.G. (1975). The child´s conception of area measure. En M. Rosskopf (Ed.), *Children´s mathematical concepts: six Piagetian studies in mathematical education* (pp. 71-110). New York. Estados unidos: Teachears College, Columbia University.

Walcott, C., Mohr, D. y Kastberg, S.E. (2009). Making sense of shape: analysis of children´s written responses. *Journal of Mathematical Behaviour*, 28(1), 30-40.

Yim, J. (2010). Children's strategies for division by fractions in the context of the area of a rectangle. *Educational Studies in Mathematics*, 73(2), 105-120.

Zacharos, K. y Chassapis, D. (2012). Teaching suggestions for the measurement of área in elementary school. Measurement tools and measurement strategys. *Review of Sciences, mathematics and ICT Education*, 6(2), 41-62

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior*. 25(3), 224-239.

Recepción:28/10/2014 *Aceptación: 05/03/2015*

GUSTAVO ADOLFO MARMOLEJO AVENIA. Es Profesor Asociado del Departamento de Matemáticas y estadística, Universidad de Nariño, Colombia. Es Doctor en Educación Matemática por la Universidad de Salamanca, España. Es Master en Educación con énfasis en Educación Matemática por la Universidad del Valle, Cali, Colombia. Posee Especialización en Educación Matemática y es Licenciado en Matemática-Física por la Universidad del Valle, Cali, Colombia.